

Die Druckverbreiterung der diffusen Heliumlinien, Vergleich zwischen Messung und Theorie im quasistatischen Bereich

H. PFENNIG und E. TREFFTZ

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. 21 a, 697–718 [1966]; eingegangen am 31. Oktober 1965)

Herrn Professor FRIEDRICH HUND zum 70. Geburtstag gewidmet

It is difficult to discriminate between theories of pressure broadening of spectral lines through comparison with experiments. Line profiles are insensitive with respect to details of the theory, and it is difficult to keep experimental conditions clear and certain enough to make the comparison relevant. We used measurements of VIDAL¹ which are satisfactory from the experimental point of view. The wings of the diffuse He-lines 2P–nD are compared with those calculated by quasistatic theory. Part B deals with STARK effect splitting of the upper level. Part C describes the quasistatic theory of the line wings, and discusses the probability function of the so called micro field strength. In part D the results of the calculation are compared with the measurements. The comparison is relevant only for the violet wings of the triplet series. The red wing of the triplet lines and the violet wing of the singlet lines are disturbed by the forbidden component 2P–nP. The red wing of singlet lines is experimentally too inexact because of disturbing wings of neighboring triplet lines. The slope of the violet side of the triplet wings shows good agreement between theory and measurement for the far wing (large $\Delta\nu$). For decreasing $\Delta\nu$ the experimental curve stays below the theoretical curve. For comparison of wing intensities it proves to be important to normalize the line profiles. It is seen that the measured height of the wings increases less with increasing main quantum number than the theoretical height.

A. Einführung

In den letzten Jahren sind eine Menge von Arbeiten erschienen, die die Druckverbreiterung von Spektrallinien (zusammenfassende Darstellung in^{2, 3}) zum Thema haben. Dabei haben sich in einigen Fällen merkliche Unterschiede für den Zusammenhang zwischen Elektronendichte und Linienprofil gegenüber früheren Abschätzungen ergeben. Insbesondere betrifft dies Linien mit linearem STARK-Effekt. Diese Unklarheit ist besonders störend in der Astrophysik, da in der Theorie der Sternatmosphären beispielsweise aus der Kontur der BALMER-Linien auf die Elektronendichte in der betreffenden Sternatmosphäre geschlossen wird. Die labormäßige Nachprüfung der Theorien hat folgende Schwierigkeiten zu überwinden. Daß die Linie optisch dünn sein muß, ist selbstverständlich. Darüber hinaus muß die Kontur der Linie bis weit in die Flügel hinein zu verfolgen sein. Das ist in eindeutiger Weise nur möglich bei Emissionslinien mit sehr schwachem Kontinuum, da sonst Ungenauigkeiten in der Lage des Kontinuums den

Verlauf der Flügelintensität verfälschen. Die Meßapparatur sollte Intensitätsunterschiede von etwa 3 Zehnerpotenzen erfassen können. Weiter muß Dichte und Temperatur der Lichtquelle in dem Bereich, der zum gemessenen Linienprofil beiträgt, konstant sein. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ergibt sich die Linienkontur als ein Integral über Schichten verschiedener Temperatur und Dichte und die gesuchten Zusammenhänge sind nur ungenau aus einem Differentiationsprozeß zu ermitteln. Schließlich ist es nötig, Verfahren zur Temperatur- und Dichte-Messung (in unserem Fall geht wesentlich die Ionen- und Elektronendichte ein) zu entwickeln, die von der nachzuprüfenden Theorie unabhängig sind.

In der Praxis erfordert es viel Mühe, die genannten Schwierigkeiten zu meistern. Hinzu kommt, daß die Linienkontur selber sich in integraler Weise aus vielen Einzelbeiträgen zusammensetzt und damit feinere Züge der Theorie verwischt werden. So ist es zu erklären, daß es fast jedem Autor einer Druckverbreiterungstheorie gelingt, seine Ergebnisse ex-

¹ C.-R. VIDAL, Z. Naturforschg. 19 a, 947 [1964]; vgl. auch Proc. 7th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Beograd 1965, im Druck.

² G. TRAVING, Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien, Braun, Karlsruhe 1960.

³ H. VAN REGEMORTER, Ann. Rev. Astron. Astrophys., L. GOLDBERG, A. J. DEUTSCH, D. LAYZER ed., Palo Alto (Calif.) 1965; hier ist weitere Literatur (bis Okt. 1964) angegeben.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

perimentell zu belegen. Wir werden in unserem speziellen Fall auf die zuletzt genannte Schwierigkeit bei der Diskussion der Ergebnisse eingehen.

Zum Vergleich zwischen Theorie und Experiment werden Messungen von VIDAL¹ an der BALMER-Serie von Wasserstoff und an den beiden diffusen Serien des Helium, $n^3D - 2^3P$ und $n^1D - 2^1P$ herangezogen, die den zuvor genannten Bedingungen genügen. Die kontinuierliche Untergrund-Strahlung – hier im wesentlichen Streulicht – betrug bei hinreichend starken Linien nur wenige Promille der Maximalintensität und ließ sich meßtechnisch erfassen. Es ist deshalb möglich, den Intensitätsabfall in den Linienflügeln über 2–3 Zehnerpotenzen zu verfolgen, sofern nicht die Überlappung der Linien eine engere Grenze setzt.

Beim Vergleich der Helium-Serien mit der BALMER-Serie des Wasserstoffs zeigen sich Unterschiede, die mit dem komplizierteren Termschema des Heliums zusammenhängen. Unter Berücksichtigung dieses Effektes sollen in dieser Arbeit theoretische und gemessene Linienprofile verglichen werden. Wir beschränken uns dabei theoretisch auf die fernen Linienflügel, für die die Druckverbreiterungstheorie einigermaßen gesichert ist. Aus der Abweichung zwischen Theorie und Experiment lassen sich Hinweise für eine verbesserte Druckverbreiterungstheorie gewinnen. Für die BALMER-Linien soll der Vergleich zwischen Theorie und Messung in einer gesonderten Abhandlung^{4a} besprochen werden.

Zunächst soll im folgenden Abschnitt B der STARK-Effekt des Heliums beschrieben werden. Abschnitt C gibt dann einen kurzen Abriß der sogenannten statistischen oder quasistatischen Druckverbreiterungstheorie, die für die fernen Linienflügel gilt, mit einer Diskussion der Wahrscheinlichkeitsverteilung des sogenannten Mikrofeldes. Schließlich bringt der letzte Abschnitt D die Ergebnisse der Rechnung und den Vergleich mit den Messungen. Eine kurze Beschreibung der Rechnung und der Ergebnisse ist in⁴ veröffentlicht.

B. Stark-Effekt des Heliums

Der STARK-Effekt von Helium im homogenen elektrischen Feld ist im Detail zuerst von FOSTER⁵ untersucht worden. Wir benutzen im wesentlichen die-

selbe Näherung, die auch FOSTER benutzt hat. Es wird angenommen, daß Wechselwirkungen zwischen Termen verschiedener Hauptquantenzahl vernachlässigt werden können. Diese Näherung ist gültig, solange die STARK-Effekt-Aufspaltung klein ist gegenüber dem Termabstand zur nächsten Hauptquantenzahl. Für die Anwendung auf die Berechnung von Linienprofilen bedeutet das, daß sich die Linienflügel benachbarter Serienglieder nicht überlappen dürfen. Dies ist aber gleichzeitig die Bedingung dafür, daß die Intensitätsabnahme in den Linienflügeln eindeutig bestimmt werden kann. Die oben genannte Näherung entspricht also genau dieser für die Messung notwendigen Bedingung. Soweit vergleichbar (nämlich für die Hauptquantenzahlen $n=4$ und 5), erhalten wir dieselben Ergebnisse wie FOSTER.

Für gegebene Hauptquantenzahl n wird die Energiematrix im System der ungestörten Helium-Eigenzustände $\Psi_0(n, L, M)$ aufgestellt. Legt man die Koordinatenachse (z -Achse) in Richtung des Feldes E , so bleiben die magnetischen Quantenzahlen M gute Quantenzahlen; das heißt: die Energiematrix zerfällt in Untermatrizen mit vorgegebenem M . Für $M \neq 0$ bleibt die Entartung bezüglich des Vorzeichens von M bestehen. Die Energiematrix hängt nur von M^2 ab. Im folgenden ist $M \geq 0$ gewählt. Für den Vergleich mit den oben genannten Messungen braucht eine Feinstruktur-Aufspaltung der Triplettzustände für $n \geq 4$ nicht berücksichtigt zu werden. Man erhält Matrizen der Ordnung $(n-M) \cdot (n-M)$, die neben der Hauptdiagonale die feldabhängigen Glieder

$$H_{L-1, L} = H_{L, L-1} = \varepsilon E \langle n, L, M | z_1 + z_2 | n, L-1, M \rangle \quad (B 1)$$

(ε Elementarladung, z_1, z_2 Koordinaten der beiden Elektronen) enthalten. Für $L \geq 1$ kann der Helium-eigenzustand $\Psi_0(n, L, M)$ in hinreichend guter Näherung beschrieben werden durch ein nicht angeregtes 1s-Elektron, das zu $H_{L-1, L}$ keinen Beitrag liefert, und ein angeregtes Elektron $n l m$ ($l=L, m=M$), dessen Eigenfunktion wasserstoffartig angenommen wird. Dann ist nach BETHE-SALPETER⁶, Gln. (60.7) und (63.5)

$$H_{L-1, L} = \varepsilon E \langle n, l, m | z | n, l-1, m \rangle = \varepsilon E a_0 \cdot \frac{3}{2} n \left[\frac{(n^2 - l^2)(l^2 - m^2)}{(2l+1)(2l-1)} \right]^{1/2} \quad (B 2)$$

(a_0 Bohrscher Radius).

⁴ H. PFENNIG u. E. TREFFTZ, Z. Phys. **190**, 253 [1966].

^{4a} H. PFENNIG, Z. Naturforsch. **21a** [1966], im Druck.

⁵ J. S. FOSTER, Proc. Roy. Soc. London A **117**, 137 [1928].

⁶ H. A. BETHE u. E. E. SALPETER, Handb. d. Physik **35**, S. FLÜGGE ed., Springer-Verlag, Berlin 1957.

Diese Formel wurde auch für $l=1$, d. h. das S-P-Wechselwirkungsglied $H_{S,P}$, benutzt. Der Fehler, der dadurch entsteht, spielt insofern keine Rolle, als der energetische Abstand zwischen den S-Termen und den übrigen (P-, D, ...) -Termen so groß ist, daß kaum Wechselwirkung auftritt.

Die Diagonalelemente $H_{L,L}$ wurden den Tabellen von MARTIN⁷ entnommen und unter der Annahme extrapoliert, daß die relativen Abstände der P-, D-, F-, ... -Terme untereinander unabhängig von der Hauptquantenzahl sind. Diese Annahme ist für die gemessenen Terme sehr gut erfüllt. Für $L \geq 6$ (I-Terme und folgende) wurde ein einheitlicher Termwert angenommen. Es erwies sich als zweckmäßig, alle Energien in cm^{-1} zu rechnen. Damit ist

$$H_{L-1,L} = 0,04270 \text{ cm}^{-1} \frac{E}{\text{kV cm}^{-1}} \quad (B 2a)$$

$$\cdot \left\langle n, l, m \left| \frac{z}{a_0} \right| n, l-1, m \right\rangle.$$

Da wir uns für die Übergänge $2\text{P} - n\text{D}$ interessieren, genügt es, sich auf die Fälle $M=0, 1, 2$ zu beschränken.

Setzt man die STARK-Effekt-Eigenfunktionen als Linearkombination der ungestörten Heliumfunktionen $\Psi_0(n, L, M)$ an:

$$\Psi(n, M, \mu) = \sum_L a_{L\mu}(E) \Psi_0(n, L, M), \quad (B 3)$$

so ist also das Eigenwertproblem

$$\sum_{L'} H_{L, L'} a_{L'\mu} = a_{L\mu} \mathcal{E}_\mu$$

$$(H_{L, L'} = 0 \text{ für } |L - L'| \geq 2) \quad (B 4)$$

zu lösen. $\mu = M, M+1, \dots, n-1$ zählt die Eigenwerte \mathcal{E}_μ der Größe nach durch, beim tiefsten beginnend. Es entspricht der im linearen STARK-Effekt üblichen parabolischen Quantenzahl n_1 (BETHE-SALPETER, Abschnitt 51): $\mu = n_1 + M$. Die μ -Zählung ist so gewählt, daß für die Triplettserie, bei der die Terme in der natürlichen Reihenfolge S-P-D-F... angeordnet sind, gleiche μ -Werte für $E \rightarrow 0$ in den gleichen ungestörten Term $L = \mu$ laufen (Abb. 2). In der Singulettserie, bei der der P-Term oberhalb der Terme $L \geq 2$ liegt, gehören die Komponenten $(M=0, \mu), (M=1, \mu), (M=2, \mu+1)$ zum gleichen ungestörten Term, vgl. Abb. 1.

Die Normierung von $\Psi(n, M, \mu)$ fordert [$\Psi_0(n, L, M)$ normiert und orthogonal]:

$$\sum_{L=M}^{n-1} a_{L\mu}^2 = 1. \quad (B 5)$$

⁷ W. C. MARTIN, J. Res. N.B.S.—A (Phys. Chem.) **64**, 19 [1960].

Die STARK-Effekt-Aufspaltung des 2P-Terms ist klein gegenüber der Aufspaltung des oberen Terms. Sie ist hier nicht berücksichtigt. Die Intensität einer STARK-Effekt-Komponente $(n, M, \mu) - 2\text{P}$, ist proportional ihrer Linienstärke $S_{M\mu}$; der Einfluß der Wellenlängenänderung auf die Intensität kann vernachlässigt werden.

$$S_{M\mu} = \varepsilon^2 \sum_{M'} |(2\text{P}, M' | \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 | n, M, \mu)|^2$$

$$= \delta_{0M} a_{0\mu}^2 S(2\text{P}, n\text{S}) + \frac{1}{5} a_{2\mu}^2 S(2\text{P}, n\text{D}), \quad (B 6)$$

wobei $S(2\text{P}, n\text{S})$ und $S(2\text{P}, n\text{D})$ die Linienstärken der ungestörten Übergänge sind. Es ist zweckmäßig, die Intensität auf die des ungestörten Übergangs $2\text{P} - n\text{D}$ zu beziehen. Da die STARK-Effekt-Aufspaltung vom Vorzeichen von M unabhängig ist, haben die Komponenten mit $M \neq 0$ doppeltes statistisches Gewicht. Wir schreiben deshalb für die relative Intensität

$$L_{M\mu} = g_M \frac{S_{M\mu}}{S(2\text{P}, n\text{D})} = g_M \left\{ \frac{1}{5} a_{2\mu}^2 + \delta_{0M} a_{0\mu}^2 S_{\text{rel}} \right\} \quad (B 7)$$

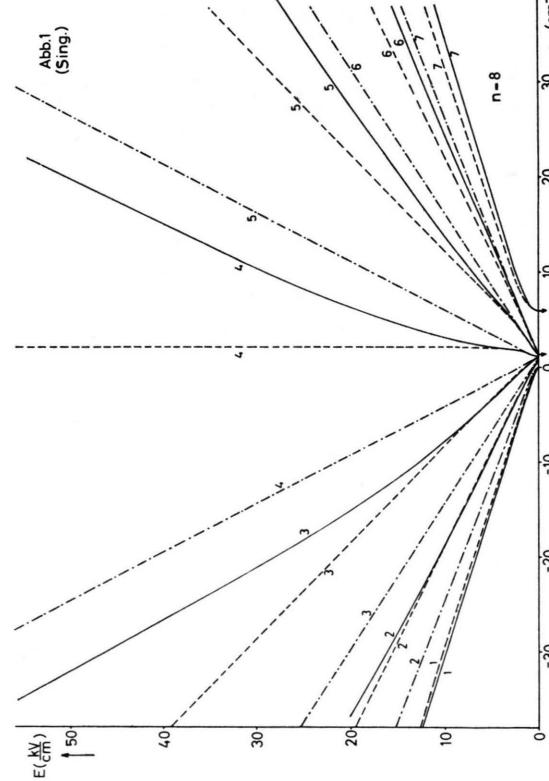
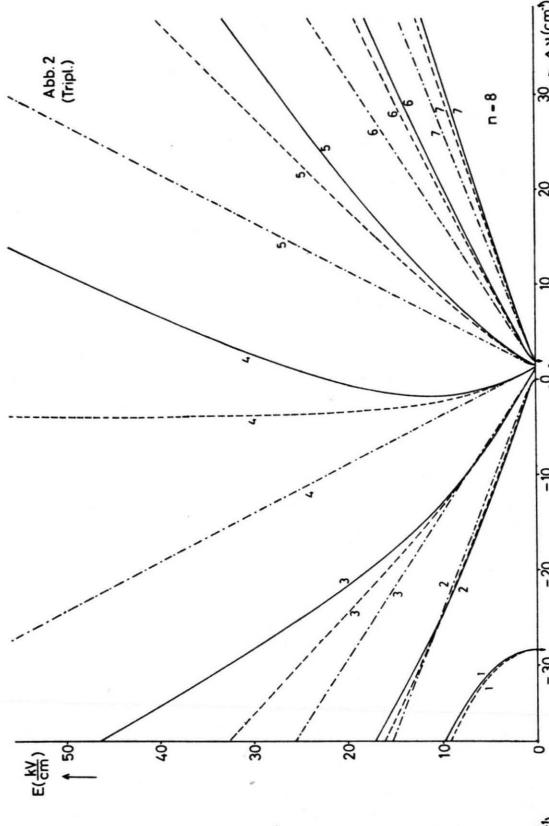
$$\text{mit} \quad g_M = \begin{cases} 1 & \text{für } M = 0, \\ 2 & \text{für } M \neq 0, \end{cases}$$

$$S_{\text{rel}} = \frac{S(2\text{P}, n\text{S})}{S(2\text{P}, n\text{D})}. \quad (B 8)$$

Die relativen Linienstärken S_{rel} wurden der Arbeit von TREFFTZ et al.⁸ entnommen, soweit sie dort in HARTREE-FOCK-Näherung berechnet sind. Für die dort nicht berechneten Hauptquantenzahlen wurden sie inter- bzw. extrapoliert. In Tab. 1 sind die benutzten ungestörten Wellenzahlen und relativen Linienstärken zusammengestellt.

Der Nullpunkt in der Wellenzahl-Skala $\Delta\nu$ ist an die Stelle des ungestörten D-Terms gelegt. Abb. 1 und 2 zeigen den STARK-Effekt für zwei Beispiele, $n=8$, Singulett und Triplet. Das Gebiet quadratischen STARK-Effekts ist so klein, daß es für unsere Zwecke ($\Delta\nu \approx 10 \text{ cm}^{-1}$) irrelevant ist. Die Komponenten $M=2$ verlaufen bereits ab $E = 1 \text{ kV/cm}$ praktisch linear mit einer Asymptote, die die Abszisse $E=0$ zwischen $\Delta\nu=0$ und 2 cm^{-1} schneidet. Für $M=0$ und 1 stören die in größerem Abstand liegenden S- und P-Niveaus. Linearer Verlauf wird später erreicht (für $M=0$ bei etwa 20 kV/cm), und die Asymptoten schneiden die Abszisse irgendwo zwischen den beteiligten Niveaus, für $M=0$ bis zu 10 cm^{-1} (Triplet) zu niedrigeren Energien verschoben.

⁸ E. TREFFTZ, A. SCHLÜTER, K. H. DETTMAR u. K. JÖRGENS, Z. Astrophys. **44**, 1 [1957].

Abb. 1. STARK-Effekt für $n=8$, Singulett, Parameter μ .Abb. 2. STARK-Effekt für $n=8$, Triplet, Parameter μ .
 (—) $M=0$, (---) $M=1$, (—·—) $M=2$)

	n	S	Termwerte in cm^{-1}			$\frac{S(2\text{P}, n\text{S})}{S(2\text{P}, n\text{D})}$
			P	F	G	
Singulett	4	-506,228	46,258	5,52	—	—
	5	-254,764	24,18	2,98	4,1	—
	6	-145,86	14,18	1,73	2,3	2,9
	7	-91,12	9,08	1,10	1,5	1,8
	8	-60,66	5,97	0,72	1,01	1,19
	9	-42,54	4,27	0,52	0,73	0,85
	10	-30,89	3,18	0,38	0,54	0,64
Triplette	4	-1146,378	-227,45	7,21	—	—
	5	-570,156	-116,465	4,06	5,3	—
	6	-323,94	-67,26	2,42	3,0	3,6
	7	-201,38	-42,33	1,53	2,0	2,3
	8	-133,76	-28,36	0,99	1,36	1,53
	9	-93,24	-19,86	0,76	0,97	1,07
	10	-67,60	-14,54	0,56	0,73	0,79
	11	-50,58	-10,75	0,42	0,54	0,58
	12	-38,89	-8,22	0,35	0,41	0,44
	13	-30,46	-6,38	0,29	0,32	0,34

Bemerkenswert ist auch, wie schnell sich die Intensität, die für $E = 0$ nur für die D- und S-Komponenten von Null verschieden ist, mit wachsendem Feld auf die übrigen Komponenten verteilt. Während für $M = 2$ die Intensitätsverteilung für linearen STARK-Effekt ziemlich direkt erreicht wird, vgl. Abb. 5 und 8, zeigen die Kurven $M = 0, 1$ (Abb. 3, 4, 6, 7) ein komplizierteres Verhalten mit Minima und Maxima. Der gerechnete Bereich von Feldstärken reicht hier nicht aus, um die asymptotische Intensitätsverteilung deutlich zu machen.

Bei einem derartigen Aufspaltungsbild und der feldabhängigen Aufteilung der Intensität auf die verschiedenen STARK-Effekt-Komponenten ist kein einfaches Gesetz für den Intensitätsabfall in den Linienflügeln zu erwarten.

Für die Triplettserie zeigen die gemessenen Linienkonturen deutlich die Feinstrukturaufspaltung des 2^3P -Terms. Die Intensität $L_{M\mu}$ eines Übergangs $(n, M, \mu) - 2^3\text{P}$ muß zerlegt werden in die Anteile für die einzelnen Feinstruktur-Komponenten. Es gilt

$$L(n, M, \mu - 2^3\text{P}_J) = \frac{2J+1}{9} L_{M\mu}. \quad (\text{B } 9)$$

Tab. 1. Termwerte bezogen auf den D-Term und relative Linienstärken
(extrapolierte Werte kursiv).

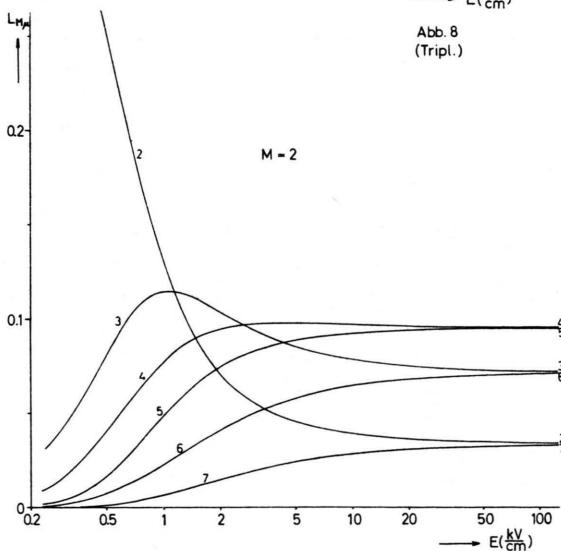
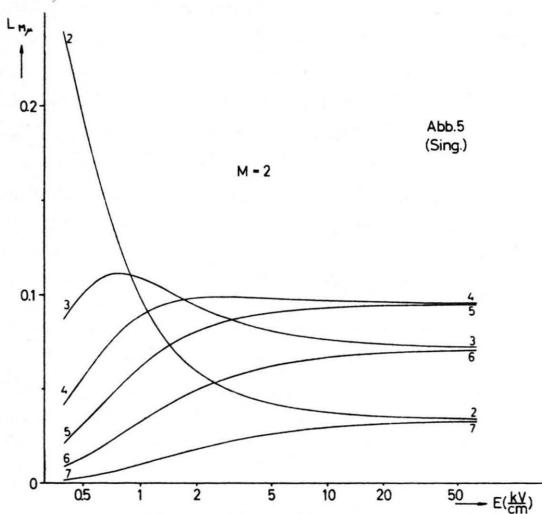
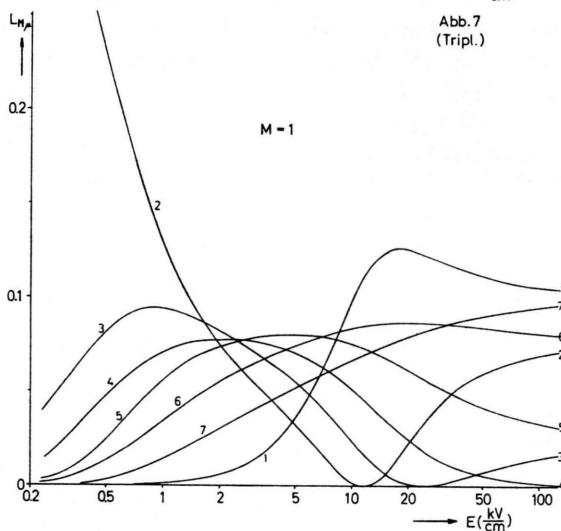
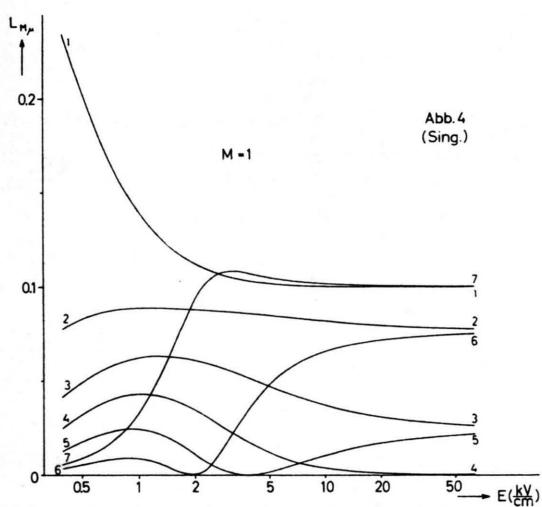
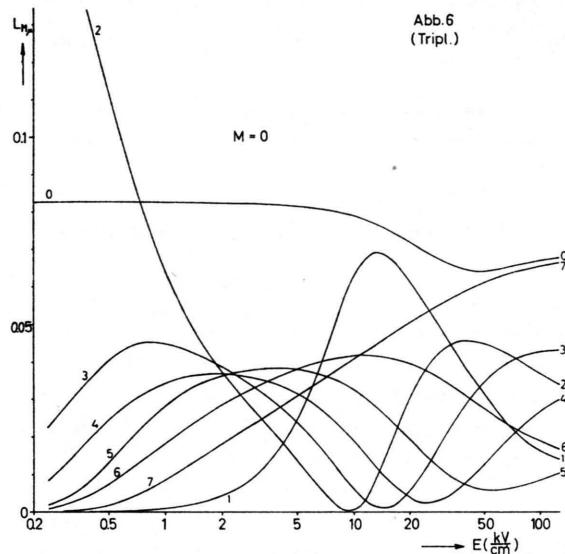
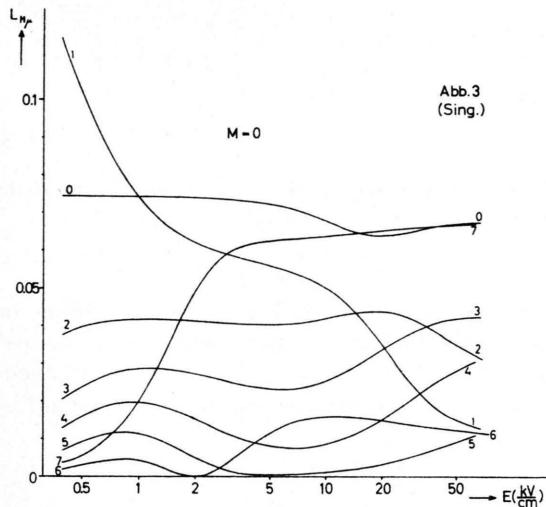


Abb. 3–8. Relative Intensitätsverteilung der STARK-Effekt-Komponenten in Abhängigkeit von der Feldstärke für $n=8$, Singulett und Triplett. Parameter μ .

Ausführliche Tabellen der STARK-Effekt-Aufspaltung $\Delta\nu$ und der relativen Linienstärken $L_{M\mu}$ finden sich in ⁹.

C. Quasistatische Druckverbreiterung

1. Allgemeine Theorie

Wie bekannt (vgl. z. B. Unsöld ¹⁰), gilt für die ferneren Linienflügel die quasistatische Druckverbreiterungstheorie. Sie beruht auf folgender Überlegung:

Betrachte eine Stelle $\Delta\nu$ der verbreiterten Spektrallinie, wobei $|\Delta\nu|$ der Abstand (in cm^{-1}) vom ungestörten Übergang $nD - 2P$ ist. Suche das elektrische Feld $E = E_{M\mu}(\Delta\nu)$, das nötig ist, um die Wellenzahl des Übergangs $(n, M, \mu) - 2P$ um $\Delta\nu$ gegenüber dem ungestörten Übergang $nD - 2P$ zu verschieben. Der Beitrag der Komponente (n, M, μ) zur Intensität $I(\Delta\nu) d\nu$ an der Stelle $\Delta\nu$ ist dann das Produkt der relativen Intensität $L_{M\mu}$ des Übergangs im Feld $E_{M\mu}(\Delta\nu)$ und der Wahrscheinlichkeit $W(E_{M\mu}) dE$, mit der am Ort des leuchtenden Atoms ein Feld zwischen $E_{M\mu}$ und $E_{M\mu} + dE$ durch vorbeifliegende Störteilchen erzeugt wird.

$$I(\Delta\nu) = \sum_{M, \mu} L_{M\mu}(E_{M\mu}) W(E_{M\mu}) |dE/d\nu|_{M\mu}. \quad (C 1)$$

Dabei ist das Verhältnis $|dE/d\nu|_{M\mu}$ durch die Steigung der Kurve $\Delta\nu_{M\mu}(E)$ gegeben. Aus der Definition von $L_{M\mu}$ folgt, daß

$$\int I(\Delta\nu) d\nu = 1 + S_{\text{rel}}(\text{diffuse} + \text{scharfe Linie}) \quad (C 2a)$$

ist, wenn man über sämtliche Komponenten einschließlich der scharfen Linie $nS - 2P$ integriert. Im allgemeinen ist jedoch die scharfe Linie wohl separiert von der diffusen. Auch zeigt die Rechnung, daß die Linienstärke der scharfen Linie kaum vom STARK-Effekt beeinflußt wird. Es gilt deshalb in guter Näherung

$$\int I(\Delta\nu) d\nu = 1 \quad (\text{diffuse Linie}) \quad (C 2b)$$

integriert über die diffuse Linie einschließlich der „verbotenen“ Komponenten. Auf diese Größe sind auch die gemessenen Linien gut zu normieren. Für einen Vergleich gemessener Flügelintensitäten mit theoretisch berechneten ist wesentlich, daß auf einheitliche Normierung geachtet wird.

In der quasistatischen Theorie wird so gerechnet, als ob durch das Feld $E_{M\mu}$ eine scharfe Linie an der Stelle $\Delta\nu$ erzeugt wird. In Wirklichkeit wirkt das

Feld E nur etwa eine Zeit

$$\tau = r/v, \quad (C 3)$$

wenn v die Geschwindigkeit und r der Abstand des Störteilchens ist, das das Feld E erzeugt:

$$E = \varepsilon/r^2. \quad (C 4)$$

Wir wollen uns auf einfach geladene Störteilchen beschränken. Die Linie erfährt dadurch eine Verbreiterung der Größenordnung $1/\tau$ in Kreisfrequenz-einheiten. Damit die quasistatische Näherung gut ist, sollte

$$1/\tau \ll |\Delta\nu| = 2\pi c |\Delta\nu| \quad (C 5)$$

(c Lichtgeschwindigkeit) sein. Durch Quadrieren von (C 5) und Einsetzen der Gln. (C 3) und (C 4) folgt

$$|\Delta\nu| \gg \frac{v^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon} \frac{E}{|\Delta\nu|}, \quad (C 6)$$

wobei $E/\Delta\nu$ konstant angenommen ist (linearer STARK-Effekt). Eine genauere Durchrechnung der Theorie ergibt, daß die Bedingung (C 6) zu scharf ist. Es genügt, wenn (TRAVING ², Kap. D 1)

$$|\Delta\nu| \gg \Delta\nu_{\text{gr}} = 0,2 \frac{v^2}{4\pi^2 c^2 \varepsilon} \frac{E}{|\Delta\nu|} \quad (C 7)$$

ist. Setzt man noch

$$\frac{m}{2} v^2 = \frac{3}{2} \varkappa T, \quad (C 8)$$

so ergibt sich für Elektronen

$$\Delta\nu_{\text{gr}} = 18 \text{ cm}^{-1} \cdot \frac{T}{1000 \text{ }^{\circ}\text{K}} \cdot \frac{E/\text{kV cm}^{-1}}{|\Delta\nu|/\text{cm}^{-1}}. \quad (C 9)$$

In dieser Form läßt sich die Grenze der quasistatischen Behandlung von Elektronen für jede STARK-Effekt-Komponente aus den Aufspaltungsbildern (Abb. 1, 2) direkt ablesen. Für die Linienkontur als Ganzes muß die Grenze $\Delta\nu_{\text{gr}}$ passend gemittelt werden über alle STARK-Effekt-Komponenten. Dazu ist die Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsfunktion $W(E)$ nötig, die in den folgenden Abschnitten beschrieben werden soll.

2. Definition der Verteilungsfunktionen

Die folgenden Ausführungen stellen kurz die bekannten Theorien für die Verteilungsfunktion $W(E)$ der Mikrofeldstärke E zusammen und führen Begriffe und Zusammenhänge ein, die später benötigt werden.

⁹ H. PFENNIG u. E. TREFFTZ, Institutsber. MPI/PAE/Astro/18/65 [1965].

¹⁰ A. UNSÖLD, Physik der Sternatmosphären, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin 1955, Kap. XI.

Die Gesamtheit der Störteilchen, d. h. der Ionen und Elektronen, in einem Plasma erzeugt am Orte des leuchtenden Atoms ein elektrisches Feld \mathfrak{E} – das sogenannte Mikrofeld –, das sich mit der Zeit im allgemeinen in ganz unregelmäßiger Weise ändert.

$W_0(\mathfrak{E}) d^3\mathfrak{E}$ bezeichne die Wahrscheinlichkeit dafür, das elektrische Mikrofeld im Bereich $d^3\mathfrak{E}$ um \mathfrak{E} vorzufinden. Wenn in dem Plasma keine Richtung ausgezeichnet ist, hängt $W_0(\mathfrak{E})$ tatsächlich nur von

$$E = |\mathfrak{E}|$$

ab. Infolgedessen gilt für die Wahrscheinlichkeit $W(E) dE$, den Absolutbetrag des Mikrofeldes zwischen E und $E + dE$ anzutreffen,

$$W(E) = 4\pi E^2 W_0(\mathfrak{E}). \quad (C 10)$$

Es ist zweckmäßig und üblich, durch die folgenden zwei Gleichungen

$$\frac{4}{15} (2\pi)^{3/2} r_0^3 n_0 = 1 \quad (C 11)$$

$$\text{und } E_0 = \frac{\varepsilon}{r_0^2} = 2,6031 \varepsilon n_0^{3/2} \quad (C 12)$$

die HOLTSMARKSche Normalfeldstärke E_0 zu definieren. In den Gln. (C 11) und (C 12) ist

n_0 = Anzahl der Störteilchen je Raumeinheit.

Dabei soll es zunächst offenbleiben, ob es sich um Ionen oder Elektronen oder beide zusammen handelt. Mit Hilfe von E_0 kann man schließlich als unabhängige Veränderliche

$$\beta = E/E_0 \quad (C 13)$$

und als weitere Verteilungsfunktion

$$H(\beta) = E_0 W(E) \quad (C 14)$$

einführen, die ebenso wie die anderen auf 1 normiert ist:

$$\int_0^\infty H(\beta) d\beta = 1. \quad (C 15)$$

Im allgemeinen ist es leichter, statt $W_0(\mathfrak{E})$ seine FOURIER-Transformierte

$$F(\mathfrak{k}) = \iiint \exp\{i\mathfrak{k}\mathfrak{E}\} W_0(\mathfrak{E}) d^3\mathfrak{E} \quad (C 16)$$

zu berechnen. Da, wie man sich leicht überlegt, $F(\mathfrak{k})$ tatsächlich nur von

$$k = |\mathfrak{k}|$$

¹¹ Ausführliche Darstellungen mit Hinweisen auf die Originalarbeiten sind z. B. in ², ³ und ¹² zu finden.

¹² K. H. BÖHM, Basic Theory of Line Formation. Beitrag zu J. L. GREENSTEIN, ed.: Stellar Atmospheres (= Stars and

abhängigt, erhält man als Umkehrung der Gl. (C 16)

$$W(E) = \frac{2}{\pi} E \int_0^\infty k F(k) \sin k E dk. \quad (C 17)$$

3. Die verschiedenen Näherungen für die Verteilungsfunktion¹¹

Bisher ist über die Verteilungsfunktion $W_0(\mathfrak{E})$ nichts ausgesagt, als daß sie unabhängig von der Richtung von \mathfrak{E} ist.

Handelt es sich zunächst um N Störteilchen einer Sorte in dem Volumen V ($n_0 = N/V$), so gilt ganz allgemein

$$W_0(\mathfrak{E}) = \int \dots \int \delta(\mathfrak{E} - \sum_{j=1}^N \mathfrak{E}_j) P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N. \quad (C 18)$$

In Gl. (C 18) bezeichnet \mathfrak{E}_j das vom Störteilchen Nr. j am Ort des leuchtenden Atoms erzeugte Feld. $P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 \dots d^3\mathbf{r}_N$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Teilchen Nr. 1 sich im Raumelement $d^3\mathbf{r}_1$ um \mathbf{r}_1 , das Teilchen Nr. 2 sich im Raumelement $d^3\mathbf{r}_2$ um \mathbf{r}_2 , ... und das Teilchen Nr. N sich im Raumelement $d^3\mathbf{r}_N$ um \mathbf{r}_N aufhält.

Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf den Fall, in dem das leuchtende Atom elektrisch neutral ist.

a) HOLTSMARK¹³ vernachlässigt die Wechselwirkung der Störteilchen untereinander völlig: Es wird das reine COULOMB-Feld

$$\mathfrak{E}_j = \mp \varepsilon \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \quad (C 19)$$

genommen (– für einfach positiv geladenes Ion, + für Elektron)

$$P(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = V^{-N} \quad (C 20)$$

gesetzt, ist doch $V^{-1} d^3\mathbf{r}_j$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das Teilchen Nr. j im Raumelement $d^3\mathbf{r}_j$ an einer beliebigen Stelle des Volumens V anzutreffen.

Das Endergebnis (nach längerer Rechnung, unter anderem nach dem Grenzübergang $N \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ derart, daß $N/V = n_0 = \text{const}$) lautet in einer Schreibweise, die bereits den späteren Ergebnissen angepaßt ist:

$$F(k) \equiv f(x) = \exp\{-x^{3/2}\}. \quad (C 21a)$$

Stellar Systems, Vol. VI); Chicago, Ill.; University of Chicago Press 1960.

¹³ J. HOLTSMARK, Phys. Z. **20**, 162 [1919]; **25**, 73 [1924]; Ann. Phys. (IV) **58**, 577 [1919].

Dabei ist als dimensionslose Variable

$$x = k E_0 \quad (C 22)$$

eingeführt.

b) ECKER, MÜLLER¹⁴ und HOFFMAN, THEIMER¹⁵ berücksichtigen die Wechselwirkung der Störteilchen untereinander insoweit, als sie zwar die Gl. (C 20) beibehalten, aber statt Gl. (C 19)

$$\mathfrak{C}_j = \mp \varepsilon \frac{r_j}{r_j^3} \left(1 + \frac{r_j}{\lambda'}\right) \exp\{-r_j/\lambda'\} \quad (C 23)$$

$$\text{mit } \lambda' = \left(\frac{\pi T}{4 \varepsilon^2 (n_i + n_e)}\right)^{1/2} \quad (C 24)$$

schreiben. In Gl. (C 23) kommt zum Ausdruck, wie gemäß der Theorie von DEBYE und HÜCKEL¹⁶ sowohl die Ionen als auch die Elektronen dazu beitragen, eine Ladung im Plasma durch eine Ladungswolke des entgegengesetzten Vorzeichens abzuschirmen. Die Theorie ist sinnvoll, solange im „DEBYE-Volumen“ $(4\pi/3)\lambda'^3$ hinreichend viele Teilchen sind, oder

$$y' = r_0/\lambda' < 1. \quad (C 25)$$

Im Endergebnis ist die Gl. (C 21a) folgendermaßen zu verallgemeinern:

$$F(k; y') \equiv f(x; v') = \exp\{-x^{3/2} \psi_1(v')\}. \quad (C 21b)$$

Dabei ist

$$\psi_1(v') = \frac{15}{V^8 \pi} \int_0^\infty [1 - j_0\{w(\sigma; v')\}] \sigma^2 d\sigma, \quad (C 26)$$

$$w(\sigma; v') = \sigma^{-2} (1 + v' \sigma) e^{-v' \sigma}, \quad (C 27)$$

$$v' = x^{1/2} y'. \quad (C 28)$$

Integriert wird über den Ort, der hier dimensionslos gemacht ist mit

$$\sigma = (k \varepsilon)^{-1/2} r = x^{-1/2} r/r_0, \quad (C 29)$$

$$j_0(\omega) \equiv \sin \omega / \omega \quad (C 30)$$

ist die sphärische BESSEL-Funktion nullter Ordnung.

Für $v' = 0$ geht Gl. (C 26) in eine entsprechende Gleichung der HOLTSMARKSchen Theorie, Abschnitt (a) über, die den Wert $\psi_1(0) = 1$ liefert. Die Gl. (C 21a) ist also der Grenzfall der Gl. (C 21b) für $v' = 0$.

¹⁴ G. ECKER, Z. Phys. **148**, 593 [1957]. — G. ECKER u. K. G. MÜLLER, Z. Phys. **153**, 317 [1958].

¹⁵ H. HOFFMAN u. O. THEIMER, Astrophys. J. **127**, 477 [1958].

¹⁶ P. DEBYE u. E. HÜCKEL, Phys. Z. **24**, 185 [1923].

c) In den Theorien unter a) und b) werden die Ionen und Elektronen in völlig gleicher Art und Weise behandelt. Im Gegensatz dazu unterscheiden MOZER und BARANGER¹⁷⁻¹⁹ zwischen einer Komponente des Mikrofeldes, deren Änderung mit der Zeit durch die Bewegung der Elektronen bestimmt ist (*high frequency*), und einer weiteren Komponente, deren Änderung mit der Zeit durch die Bewegung der Ionen bestimmt ist (*low frequency*). Die zweite Komponente ist der Mittelwert des Mikrofeldes über Zeiten, die groß im Vergleich zu typischen Elektronen-Relaxationszeiten, aber klein im Vergleich zu typischen Ionen-Relaxationszeiten sind. Infolgedessen ist die Annahme vernünftig, die schnell veränderliche Komponente sei dieselbe wie die eines Elektronengases auf homogenem, neutralisierendem Untergrund.

Gegenüber Gl. (C 20) tun MOZER und BARANGER den nächsten Schritt bei einer Entwicklung von $P(r_1, r_2, \dots, r_N)$ nach zunehmender Ordnung der Korrelation der Störteilchen untereinander, indem sie die Korrelation zwischen zwei Teilchen (jeweils derselben Sorte) berücksichtigen:

$$P(r_1, r_2, \dots, r_N) = V^{-N} \{1 + \sum_{j < k} g_2(r_j, r_k)\}. \quad (C 31)$$

Die Funktionen $g_2(r_j, r_k)$ sind symmetrisch in den Teilchenkoordinaten, werden für große Volumina V von V unabhängig, verschwinden für hohe Temperaturen, $T \rightarrow \infty$, und sind nur dort wesentlich von 0 verschieden, wo die Teilchen einander sehr nahe sind. Nach dem Verfahren von DEBYE und HÜCKEL folgt auf dem Wege über die linearisierte POISSON-BOLTZMANN-Gleichung für die langsam veränderliche Komponente:

$$g_2(r_1, r_2) = \exp \left\{ - \frac{\varepsilon^2}{\pi T} \frac{\exp \left\{ - \frac{|r_1 - r_2|}{\lambda'} \right\}}{|r_1 - r_2|} \right\} - 1 \approx - \frac{\varepsilon^2}{\pi T} \frac{\exp \left\{ - \frac{|r_1 - r_2|}{\lambda'} \right\}}{|r_1 - r_2|}. \quad (C 32)$$

In diesem Falle tragen also sowohl die Ionen als auch die Elektronen zur Abschirmung bei. Dagegen bewegen sich die Elektronen zu schnell, als daß die Ionen sich auf sie einstellen können. Das Ergebnis für die schnell veränderliche Komponente unterschei-

¹⁷ B. MOZER, Atomic Line Shapes from a Plasma, Technical Report No. 3, Contract 760(15), Office of Naval Research; Pittsburgh, Pa.: Carnegie Institute of Technology, Dept. of Physics.

¹⁸ B. MOZER u. M. BARANGER, Phys. Rev. **115**, 521 [1959].

¹⁹ B. MOZER u. M. BARANGER, Phys. Rev. **118**, 626 [1960].

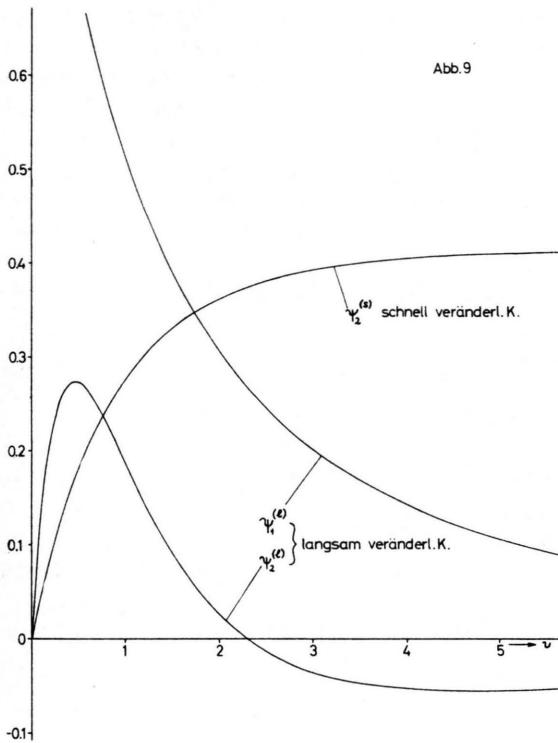


Abb. 9. Hilfsfunktionen $\psi_1(v)$, $\psi_2(v)$ zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Feldstärke nach Gl. (C 21c) und (C 40).

det sich daher von dem der Gl. (C 32) dadurch, daß

$$\lambda = \left(\frac{\kappa T}{4 \pi \varepsilon^2 n_e} \right)^{1/2} = \sqrt{2} \lambda' \quad (C 33)$$

an die Stelle von λ' tritt.

$$\psi_2(v) = - \frac{15}{64 \pi^2 \sqrt{2} \pi} v^2 \int \int \left[\exp \left\{ i \frac{h(\sigma_1)}{\sigma_1^2} \cos \Theta_1 \right\} - 1 \right] \cdot \left[\exp \left\{ i \frac{h(\sigma_2)}{\sigma_2^2} \cos \Theta_2 \right\} - 1 \right] \frac{\exp \{-v_j |\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2|\}}{|\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2|} d^3 \vec{\sigma}_1 d^3 \vec{\sigma}_2 \quad (C 37)$$

$$\text{mit } \begin{cases} v_j = v \\ h(\sigma) = 1 \end{cases} \text{ schnell veränderliche Komponente} \quad (C 38a)$$

$$\text{und } \begin{cases} v_j = \sqrt{2} v \\ h(\sigma) = (1 + v \sigma) e^{-v\sigma} \end{cases} \text{ langsam veränderliche Komponente.} \quad (C 38b)$$

4. Einzelheiten der Rechnung

Im wesentlichen haben wir die Mikrofeld-Verteilung nach BARANGER und MOZER benutzt. Die folgenden Bemerkungen beziehen sich auf diese Theorie. Gl. (C 17), ausgedrückt in β, x, v [Gln. (C 13), (C 22), (C 21c) und (C 35)] lautet:

$$H(\beta) \equiv H(\beta; y) = \frac{2}{\pi} \beta \int_0^\infty x f(x; v) \sin \beta x dx = \frac{2}{\pi} \beta \int_0^\infty x \exp \{-x^{1/2} [\psi_1(v) - \psi_2(v)]\} \sin \beta x dx \quad (C 39)$$

mit

$$v = x^{1/2} y.$$

Für die Berechnung des Mikrofeldes verwenden MOZER und BARANGER das reine COULOMB-Feld

$$\mathfrak{E}_j = + \epsilon \frac{r_j}{r_j^3} \quad (C 34a)$$

für die schnell veränderliche Komponente und

$$\mathfrak{E}_j = - \epsilon \frac{r_j}{r_j^3} \left(1 + \frac{r_j}{\lambda} \right) \exp \{ -r_j/\lambda \} \quad (C 34b)$$

für die langsam veränderliche Komponente. Die Gln. (C 34), im besonderen auch die Wahl von λ (und nicht etwa von λ'), folgen aus dem, was weiter oben über die zeitlichen Mittelungen gesagt wurde.

Das Endergebnis lautet²⁰

$$F(k; y) \equiv f(x; v) = \exp \{ -x^{1/2} [\psi_1(v) - \psi_2(v)] \}. \quad (C 21c)$$

Dabei ist $v = x^{1/2} y$ (C 35a)

und $y = r_0/\lambda$. (C 35b)

Auch hier gilt die Theorie nur für $y < 1$.

$\psi_1(v)$ für die langsam veränderliche Komponente – im weiteren $\psi_1^{(l)}(v)$ genannt – erhält man aus Gl. (C 26), wenn man dort durchweg v' durch v ersetzt. Für die schnell veränderliche Komponente gilt

$$\psi_1^{(s)}(v) = \psi_1^{(l)}(0) = 1. \quad (C 36)$$

Der zusätzliche Term $\psi_2(v)$ geht auf die Funktion $g_2(r_j, r_k)$ zurück:

²⁰ Im folgenden ist v eine mathematische Hilfsgröße und nicht mit der Teilchengeschwindigkeit v zu verwechseln.

Für große β lassen sich semikonvergente Entwicklungen nach negativen Potenzen von β angeben, die zugleich Potenzreihenentwicklungen nach y sind. Bei dem Versuch, die von BARANGER und MOZER angegebenen Entwicklungen zu verifizieren, ergaben sich Unterschiede, die uns veranlaßten, auch die numerischen Rechnungen zu wiederholen. Als schließlich unsere Entwicklungen mit unseren numerischen Rechnungen wesentlich besser übereinstimmten, als das bei BARANGER und MOZER der Fall ist, haben wir sie den von BARANGER und MOZER veröffentlichten Werten vorgezogen. Die Unterschiede in $H(\beta)$ betragen bis zu 10%. Auf die Linienkontur wirkt sich das nicht wesentlich aus. Es dürfte sich um Rechenengenauigkeiten handeln. Im Prinzip haben wir uns an das von BARANGER und MOZER vorgeschlagene Rechenrezept gehalten. Das folgende gibt einige Details der Rechnung und die Ergebnisse.

$\psi_2(v)$, Gl. (C 37), wird nach Kugelfunktionen entwickelt und über die Winkel integriert:

$$\begin{aligned} \psi_2(v) = & -\frac{15}{2\sqrt{2}\pi} v^2 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l (2l+1) \int_{\sigma_1=0}^{\infty} \int_{\sigma_2=0}^{\sigma_1} \left[j_l \left(\frac{h(\sigma_1)}{\sigma_1^2} \right) - \delta_{10} \right] \\ & \cdot \left[j_l \left(\frac{h(\sigma_2)}{\sigma_2^2} \right) - \delta_{10} \right] v_j f_l^>(\sigma_1) f_l^<(\sigma_2) \sigma_1^2 d\sigma_1 \sigma_2^2 d\sigma_2. \end{aligned} \quad (\text{C 40})$$

Hier sind $j_l(w)$ sphärische BESSEL-Funktionen, vgl. Anhang.

$f_l^>, f_l^<$ stammen aus der Entwicklung des Abschirmgliedes ($\vec{\zeta} = v_j \vec{\sigma}$):

$$\frac{\exp\{-|\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2|\}}{|\vec{\zeta}_1 - \vec{\zeta}_2|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} f_l^>(\zeta_1) f_l^<(\zeta_2) \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\Theta_1, \varphi_1) Y_l^m(\Theta_2, \varphi_2) \quad \text{für } \zeta_1 \geq \zeta_2 \quad (\text{C 41})$$

[$Y_l^m(\Theta, \varphi)$ normierte Kugelflächenfunktionen]. $f_l^>(\zeta), f_l^<(\zeta)$ sind im wesentlichen wieder BESSEL-Funktionen. Sie sind im Anhang angegeben.

Wie man sieht, haben die Doppelintegrale in $\psi_2(v)$ die einfache Gestalt

$$\int_0^{\infty} \text{Int}_1(x_1) \int_0^{x_1} \text{Int}_2(x_2) dx_2 dx_1,$$

wobei sich die beiden Integranden $\text{Int}_1, \text{Int}_2$ sehr ähnlich sind. Der numerische Aufwand ist nur etwa doppelt so groß wie für ein einfaches Integral. Sowohl bei der Berechnung von $\psi_1(v)$ (langsam veränderliche Komponente), Gl. (C 26), wie auch von $\psi_2(v)$ müssen die Grenzen $\sigma \rightarrow 0, \sigma \rightarrow \infty$ sorgfältig behandelt werden, im ersten Fall wegen der sich häufenden Oszillationen, im letzteren Fall wegen langsamer Konvergenz, die ein halbanalytisches Verfahren erforderlich macht. Wir haben im numerischen Verfahren die Entwicklung (C 40) ein Glied weiter getrieben als BARANGER-MOZER, nämlich bis zu $l=3$. Abb. 9 gibt die Ergebnisse. Im Gegensatz zu BARANGER-MOZER schneidet $\psi_2(v)$ für die langsam veränderliche Komponente die Abszisse und wird für $v > 2,3$ negativ. Für $v \rightarrow \infty$ sollte $\psi_2(v) \rightarrow 0$ gehen. Für die schnell veränderliche Komponente fehlt bei uns das Maximum in $\psi_2(v)$. Der Grenzwert

$$\psi_2(v) = \psi_2^{(s)}(v) \rightarrow \sqrt{2} - 1 \quad \text{für } v \rightarrow \infty \quad (\text{C 42})$$

wird von unten angenähert. $\psi_1(v)$ stimmt mit den Rechnungen von BARANGER und MOZER überein. In Tab. 2 ist $H(\beta; y)$ für die langsam veränderliche und die schnell veränderliche Komponente aufgeführt.

5. Reihenentwicklungen

Für die asymptotische Entwicklung von $H(\beta)$ werden die Entwicklungskoeffizienten von $\psi(v)$ für kleine v benötigt. Sie berechnen sich teils aus Integralen, deren Hauptbeitrag von Gebieten $v \sigma \approx 1, \sigma \gg 1$ stammen, teils aus Integralen aus Gebieten $\sigma \approx 1, v \sigma \ll 1$. Glieder der ersten Art seien kurz als Fernglieder bezeichnet. Hier können die sphärischen BESSEL-Funktionen in Potenzreihen entwickelt werden. Bei den Gliedern der zweiten Art, den „Nahgliedern“, lassen sich die Exponentialfunktionen $\exp\{-v\sigma\}$ und $\exp\{-v_j |\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2|\}$ entwickeln. Einzelheiten gibt der Anhang. In $\psi_1(v)$, langsam veränderliche Komponente, sind die Terme v^0, v^2, v^3, \dots Nahglieder, während Fernglieder in v^1, v^5, \dots auftreten. In $\psi_2(v)$ sind für beide Komponenten der erste Term $\sim v^1$ ein Fernglied und die nächsten Terme v^2, v^3, \dots Nahglieder. Es ergibt sich:

$\beta \backslash y$	0	langsam v.K.					schnell v.K.			
		0,2	0,4	0,6	0,8	0,2	0,4	0,6	0,8	0,8
0,10	$4,225 \cdot 10^{-3}$	$6,983 \cdot 10^{-3}$	$1,150 \cdot 10^{-2}$	$1,899 \cdot 10^{-2}$	$3,173 \cdot 10^{-2}$	$5,434 \cdot 10^{-3}$	$6,652 \cdot 10^{-3}$	$7,774 \cdot 10^{-3}$	$8,734 \cdot 10^{-3}$	
0,20	$1,667 \cdot 10^{-2}$	$2,733 \cdot 10^{-2}$	$4,444 \cdot 10^{-2}$	$7,190 \cdot 10^{-2}$	$1,160 \cdot 10^{-1}$	$2,136 \cdot 10^{-2}$	$2,607 \cdot 10^{-2}$	$3,039 \cdot 10^{-2}$	$3,408 \cdot 10^{-2}$	
0,30	$3,664 \cdot 10^{-2}$	$5,930 \cdot 10^{-2}$	$9,446 \cdot 10^{-2}$	$1,480 \cdot 10^{-1}$	$2,269 \cdot 10^{-1}$	$4,670 \cdot 10^{-2}$	$5,670 \cdot 10^{-2}$	$6,583 \cdot 10^{-2}$	$7,361 \cdot 10^{-2}$	
0,40	$6,308 \cdot 10^{-2}$	$1,003 \cdot 10^{-1}$	$1,554 \cdot 10^{-1}$	$2,334 \cdot 10^{-1}$	$3,366 \cdot 10^{-1}$	$7,977 \cdot 10^{-2}$	$9,617 \cdot 10^{-2}$	$1,110 \cdot 10^{-1}$	$1,236 \cdot 10^{-1}$	
0,50	$9,460 \cdot 10^{-2}$	$1,470 \cdot 10^{-1}$	$2,202 \cdot 10^{-1}$	$3,152 \cdot 10^{-1}$	$4,257 \cdot 10^{-1}$	$1,184 \cdot 10^{-1}$	$1,415 \cdot 10^{-1}$	$1,622 \cdot 10^{-1}$	$1,797 \cdot 10^{-1}$	
0,60	$1,296 \cdot 10^{-1}$	$1,960 \cdot 10^{-1}$	$2,825 \cdot 10^{-1}$	$3,838 \cdot 10^{-1}$	$4,859 \cdot 10^{-1}$	$1,603 \cdot 10^{-1}$	$1,896 \cdot 10^{-1}$	$2,155 \cdot 10^{-1}$	$2,372 \cdot 10^{-1}$	
0,70	$1,664 \cdot 10^{-1}$	$2,440 \cdot 10^{-1}$	$3,373 \cdot 10^{-1}$	$4,342 \cdot 10^{-1}$	$5,174 \cdot 10^{-1}$	$2,031 \cdot 10^{-1}$	$2,372 \cdot 10^{-1}$	$2,670 \cdot 10^{-1}$	$2,919 \cdot 10^{-1}$	
0,80	$2,032 \cdot 10^{-1}$	$2,882 \cdot 10^{-1}$	$3,811 \cdot 10^{-1}$	$4,652 \cdot 10^{-1}$	$5,247 \cdot 10^{-1}$	$2,443 \cdot 10^{-1}$	$2,816 \cdot 10^{-1}$	$3,137 \cdot 10^{-1}$	$3,401 \cdot 10^{-1}$	
0,90	$2,386 \cdot 10^{-1}$	$3,264 \cdot 10^{-1}$	$4,123 \cdot 10^{-1}$	$4,785 \cdot 10^{-1}$	$5,142 \cdot 10^{-1}$	$2,822 \cdot 10^{-1}$	$3,206 \cdot 10^{-1}$	$3,530 \cdot 10^{-1}$	$3,795 \cdot 10^{-1}$	
1,00	$2,712 \cdot 10^{-1}$	$3,571 \cdot 10^{-1}$	$4,309 \cdot 10^{-1}$	$4,772 \cdot 10^{-1}$	$4,917 \cdot 10^{-1}$	$3,152 \cdot 10^{-1}$	$3,526 \cdot 10^{-1}$	$3,835 \cdot 10^{-1}$	$4,085 \cdot 10^{-1}$	
1,10	$2,999 \cdot 10^{-1}$	$3,795 \cdot 10^{-1}$	$4,381 \cdot 10^{-1}$	$4,646 \cdot 10^{-1}$	$4,621 \cdot 10^{-1}$	$3,421 \cdot 10^{-1}$	$3,767 \cdot 10^{-1}$	$4,045 \cdot 10^{-1}$	$4,268 \cdot 10^{-1}$	
1,20	$3,238 \cdot 10^{-1}$	$3,937 \cdot 10^{-1}$	$4,354 \cdot 10^{-1}$	$4,444 \cdot 10^{-1}$	$4,290 \cdot 10^{-1}$	$3,624 \cdot 10^{-1}$	$3,926 \cdot 10^{-1}$	$4,161 \cdot 10^{-1}$	$4,348 \cdot 10^{-1}$	
1,30	$3,425 \cdot 10^{-1}$	$4,000 \cdot 10^{-1}$	$4,249 \cdot 10^{-1}$	$4,192 \cdot 10^{-1}$	$3,949 \cdot 10^{-1}$	$3,759 \cdot 10^{-1}$	$4,006 \cdot 10^{-1}$	$4,191 \cdot 10^{-1}$	$4,335 \cdot 10^{-1}$	
1,40	$3,557 \cdot 10^{-1}$	$3,993 \cdot 10^{-1}$	$4,086 \cdot 10^{-1}$	$3,915 \cdot 10^{-1}$	$3,614 \cdot 10^{-1}$	$3,829 \cdot 10^{-1}$	$4,015 \cdot 10^{-1}$	$4,146 \cdot 10^{-1}$	$4,246 \cdot 10^{-1}$	
1,50	$3,636 \cdot 10^{-1}$	$3,927 \cdot 10^{-1}$	$3,883 \cdot 10^{-1}$	$3,629 \cdot 10^{-1}$	$3,296 \cdot 10^{-1}$	$3,839 \cdot 10^{-1}$	$3,961 \cdot 10^{-1}$	$4,039 \cdot 10^{-1}$	$4,096 \cdot 10^{-1}$	
1,60	$3,663 \cdot 10^{-1}$	$3,812 \cdot 10^{-1}$	$3,656 \cdot 10^{-1}$	$3,346 \cdot 10^{-1}$	$2,999 \cdot 10^{-1}$	$3,795 \cdot 10^{-1}$	$3,856 \cdot 10^{-1}$	$3,885 \cdot 10^{-1}$	$3,902 \cdot 10^{-1}$	
1,80	$3,585 \cdot 10^{-1}$	$3,485 \cdot 10^{-1}$	$3,176 \cdot 10^{-1}$	$2,815 \cdot 10^{-1}$	$2,478 \cdot 10^{-1}$	$3,582 \cdot 10^{-1}$	$3,537 \cdot 10^{-1}$	$3,485 \cdot 10^{-1}$	$3,439 \cdot 10^{-1}$	
2,00	$3,369 \cdot 10^{-1}$	$3,089 \cdot 10^{-1}$	$2,711 \cdot 10^{-1}$	$2,355 \cdot 10^{-1}$	$2,051 \cdot 10^{-1}$	$3,260 \cdot 10^{-1}$	$3,141 \cdot 10^{-1}$	$3,035 \cdot 10^{-1}$	$2,950 \cdot 10^{-1}$	
2,20	$3,068 \cdot 10^{-1}$	$2,684 \cdot 10^{-1}$	$2,295 \cdot 10^{-1}$	$1,969 \cdot 10^{-1}$	$1,706 \cdot 10^{-1}$	$2,889 \cdot 10^{-1}$	$2,728 \cdot 10^{-1}$	$2,595 \cdot 10^{-1}$	$2,491 \cdot 10^{-1}$	
2,40	$2,727 \cdot 10^{-1}$	$2,302 \cdot 10^{-1}$	$1,937 \cdot 10^{-1}$	$1,651 \cdot 10^{-1}$	$1,429 \cdot 10^{-1}$	$2,513 \cdot 10^{-1}$	$2,336 \cdot 10^{-1}$	$2,196 \cdot 10^{-1}$	$2,087 \cdot 10^{-1}$	
2,60	$2,382 \cdot 10^{-1}$	$1,961 \cdot 10^{-1}$	$1,635 \cdot 10^{-1}$	$1,391 \cdot 10^{-1}$	$1,206 \cdot 10^{-1}$	$2,159 \cdot 10^{-1}$	$1,985 \cdot 10^{-1}$	$1,851 \cdot 10^{-1}$	$1,746 \cdot 10^{-1}$	
2,80	$2,056 \cdot 10^{-1}$	$1,667 \cdot 10^{-1}$	$1,385 \cdot 10^{-1}$	$1,180 \cdot 10^{-1}$	$1,025 \cdot 10^{-1}$	$1,843 \cdot 10^{-1}$	$1,682 \cdot 10^{-1}$	$1,560 \cdot 10^{-1}$	$1,464 \cdot 10^{-1}$	
3,00	$1,761 \cdot 10^{-1}$	$1,417 \cdot 10^{-1}$	$1,179 \cdot 10^{-1}$	$1,007 \cdot 10^{-1}$	$8,777 \cdot 10^{-2}$	$1,569 \cdot 10^{-1}$	$1,426 \cdot 10^{-1}$	$1,318 \cdot 10^{-1}$	$1,234 \cdot 10^{-1}$	
3,25	$1,444 \cdot 10^{-1}$	$1,161 \cdot 10^{-1}$	$9,708 \cdot 10^{-2}$	$8,338 \cdot 10^{-2}$	$7,303 \cdot 10^{-2}$	$1,283 \cdot 10^{-1}$	$1,165 \cdot 10^{-1}$	$1,075 \cdot 10^{-1}$	$1,005 \cdot 10^{-1}$	
3,50	$1,184 \cdot 10^{-1}$	$9,582 \cdot 10^{-2}$	$8,068 \cdot 10^{-2}$	$6,975 \cdot 10^{-2}$	$6,140 \cdot 10^{-2}$	$1,054 \cdot 10^{-1}$	$9,583 \cdot 10^{-2}$	$8,847 \cdot 10^{-2}$	$8,266 \cdot 10^{-2}$	
3,75	$9,741 \cdot 10^{-2}$	$7,968 \cdot 10^{-2}$	$6,767 \cdot 10^{-2}$	$5,890 \cdot 10^{-2}$	$5,213 \cdot 10^{-2}$	$8,714 \cdot 10^{-2}$	$7,949 \cdot 10^{-2}$	$7,352 \cdot 10^{-2}$	$6,875 \cdot 10^{-2}$	
4,00	$8,067 \cdot 10^{-2}$	$6,682 \cdot 10^{-2}$	$5,728 \cdot 10^{-2}$	$5,019 \cdot 10^{-2}$	$4,465 \cdot 10^{-2}$	$7,263 \cdot 10^{-2}$	$6,653 \cdot 10^{-2}$	$6,170 \cdot 10^{-2}$	$5,778 \cdot 10^{-2}$	
4,25	$6,733 \cdot 10^{-2}$	$5,652 \cdot 10^{-2}$	$4,889 \cdot 10^{-2}$	$4,312 \cdot 10^{-2}$	$3,856 \cdot 10^{-2}$	$6,105 \cdot 10^{-2}$	$5,619 \cdot 10^{-2}$	$5,227 \cdot 10^{-2}$	$4,904 \cdot 10^{-2}$	
4,50	$5,667 \cdot 10^{-2}$	$4,821 \cdot 10^{-2}$	$4,207 \cdot 10^{-2}$	$3,733 \cdot 10^{-2}$	$3,354 \cdot 10^{-2}$	$5,176 \cdot 10^{-2}$	$4,786 \cdot 10^{-2}$	$4,467 \cdot 10^{-2}$	$4,200 \cdot 10^{-2}$	
4,75	$4,811 \cdot 10^{-2}$	$4,144 \cdot 10^{-2}$	$3,647 \cdot 10^{-2}$	$3,256 \cdot 10^{-2}$	$2,938 \cdot 10^{-2}$	$4,425 \cdot 10^{-2}$	$4,111 \cdot 10^{-2}$	$3,849 \cdot 10^{-2}$	$3,627 \cdot 10^{-2}$	
5,00	$4,118 \cdot 10^{-2}$	$3,590 \cdot 10^{-2}$	$3,184 \cdot 10^{-2}$	$2,859 \cdot 10^{-2}$	$2,590 \cdot 10^{-2}$	$3,813 \cdot 10^{-2}$	$3,559 \cdot 10^{-2}$	$3,342 \cdot 10^{-2}$	$3,157 \cdot 10^{-2}$	
5,25	$3,553 \cdot 10^{-2}$	$3,131 \cdot 10^{-2}$	$2,797 \cdot 10^{-2}$	$2,525 \cdot 10^{-2}$	$2,297 \cdot 10^{-2}$	$3,311 \cdot 10^{-2}$	$3,103 \cdot 10^{-2}$	$2,923 \cdot 10^{-2}$	$2,766 \cdot 10^{-2}$	
5,50	$3,089 \cdot 10^{-2}$	$2,749 \cdot 10^{-2}$	$2,472 \cdot 10^{-2}$	$2,242 \cdot 10^{-2}$	$2,048 \cdot 10^{-2}$	$2,894 \cdot 10^{-2}$	$2,723 \cdot 10^{-2}$	$2,573 \cdot 10^{-2}$	$2,440 \cdot 10^{-2}$	
5,75	$2,704 \cdot 10^{-2}$	$2,428 \cdot 10^{-2}$	$2,196 \cdot 10^{-2}$	$2,001 \cdot 10^{-2}$	$1,835 \cdot 10^{-2}$	$2,546 \cdot 10^{-2}$	$2,404 \cdot 10^{-2}$	$2,278 \cdot 10^{-2}$	$2,165 \cdot 10^{-2}$	
6,00	$2,382 \cdot 10^{-2}$	$2,156 \cdot 10^{-2}$	$1,961 \cdot 10^{-2}$	$1,794 \cdot 10^{-2}$	$1,651 \cdot 10^{-2}$	$2,254 \cdot 10^{-2}$	$2,135 \cdot 10^{-2}$	$2,028 \cdot 10^{-2}$	$1,931 \cdot 10^{-2}$	
6,50	$1,881 \cdot 10^{-2}$	$1,726 \cdot 10^{-2}$	$1,586 \cdot 10^{-2}$	$1,461 \cdot 10^{-2}$	$1,354 \cdot 10^{-2}$	$1,794 \cdot 10^{-2}$	$1,710 \cdot 10^{-2}$	$1,631 \cdot 10^{-2}$	$1,558 \cdot 10^{-2}$	
7,00	$1,516 \cdot 10^{-2}$	$1,407 \cdot 10^{-2}$	$1,303 \cdot 10^{-2}$	$1,210 \cdot 10^{-2}$	$1,124 \cdot 10^{-2}$	$1,455 \cdot 10^{-2}$	$1,393 \cdot 10^{-2}$	$1,335 \cdot 10^{-2}$	$1,279 \cdot 10^{-2}$	
7,50	$1,244 \cdot 10^{-2}$	$1,164 \cdot 10^{-2}$	$1,086 \cdot 10^{-2}$	$1,013 \cdot 10^{-2}$	$9,453 \cdot 10^{-3}$	$1,199 \cdot 10^{-2}$	$1,153 \cdot 10^{-2}$	$1,108 \cdot 10^{-2}$	$1,065 \cdot 10^{-2}$	
8,00	$1,035 \cdot 10^{-2}$	$9,763 \cdot 10^{-3}$	$9,162 \cdot 10^{-3}$	$8,581 \cdot 10^{-3}$	$8,045 \cdot 10^{-3}$	$1,002 \cdot 10^{-2}$	$9,674 \cdot 10^{-3}$	$9,325 \cdot 10^{-3}$	$8,985 \cdot 10^{-3}$	
8,50	$8,725 \cdot 10^{-3}$	$8,281 \cdot 10^{-3}$	$7,813 \cdot 10^{-3}$	$7,354 \cdot 10^{-3}$	$6,914 \cdot 10^{-3}$	$8,479 \cdot 10^{-3}$	$8,209 \cdot 10^{-3}$	$7,933 \cdot 10^{-3}$	$7,661 \cdot 10^{-3}$	
9,00	$7,438 \cdot 10^{-3}$	$7,096 \cdot 10^{-3}$	$6,726 \cdot 10^{-3}$	$6,362 \cdot 10^{-3}$	$6,009 \cdot 10^{-3}$	$7,249 \cdot 10^{-3}$	$7,037 \cdot 10^{-3}$	$6,816 \cdot 10^{-3}$	$6,595 \cdot 10^{-3}$	
9,50	$6,404 \cdot 10^{-3}$	$6,137 \cdot 10^{-3}$	$5,839 \cdot 10^{-3}$	$5,533 \cdot 10^{-3}$	$5,253 \cdot 10^{-3}$	$6,257 \cdot 10^{-3}$	$6,087 \cdot 10^{-3}$	$5,908 \cdot 10^{-3}$	$5,727 \cdot 10^{-3}$	
10,00	$5,561 \cdot 10^{-3}$	$5,350 \cdot 10^{-3}$	$5,108 \cdot 10^{-3}$	$4,852 \cdot 10^{-3}$	$4,616 \cdot 10^{-3}$	$5,445 \cdot 10^{-3}$	$5,308 \cdot 10^{-3}$	$5,161 \cdot 10^{-3}$	$5,011 \cdot 10^{-3}$	

Tab. 2. $H(\beta; y)$ für langsam und schnell veränderliche Komponente.

Langsam veränderliche Komponente

$$\begin{aligned}\psi_1^{(l)}(v) &= 1 - 0,748017 v + 0,357143 v^2 - 0,097915 v^3 + \dots; \\ \psi_2^{(l)}(v) &= 0,163780 v - 0,3667 v^2 + 0,23633 v^3 + \dots; \\ \psi_{\text{ges}}^{(l)}(v) &= \psi_1^{(l)}(v) - \psi_2^{(l)}(v) = b_0^{(l)} + b_1^{(l)} v + \dots \\ &= 1 - 0,911797 v + 0,7238 v^2 - 0,33424 v^3 + \dots.\end{aligned}\quad (\text{C } 43\text{a})$$

Schnell veränderliche Komponente

$$\begin{aligned}\psi_1^{(s)}(v) &= 1, \\ \psi_2^{(s)}(v) &= 0,498678 v - 0,3667 v^2 + 0,16711 v^3 + \dots, \\ \psi_{\text{ges}}^{(s)}(v) &= \psi_1^{(s)}(v) - \psi_2^{(s)}(v) = b_0^{(s)} + b_1^{(s)} v + \dots \\ &= 1 - 0,498678 v + 0,3667 v^2 - 0,16711 v^3 + \dots.\end{aligned}\quad (\text{C } 43\text{b})$$

Die asymptotische Entwicklung von $H(\beta)$, Gl. (C 39), erhält man am schnellsten, wenn man

$$\exp\{-x^{3/2}[\psi_1(v) - \psi_2(v)]\} = \exp\{-x^{3/2}[b_0 + b_1 x^{1/2} y + \dots]\} \quad (\text{C } 44)$$

formal in eine Potenzreihe entwickelt und die auftretenden uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty x^q \begin{Bmatrix} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{Bmatrix} dx = \frac{d}{d\beta} \int_0^\infty x^{q-1} \begin{Bmatrix} -\cos \beta x \\ \sin \beta x \end{Bmatrix} dx \quad (\text{C } 45)$$

induktiv auf konvergente Integrale zurückführt.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens soll hier übergangen werden. Die Ergebnisse sind in Tab. 5 aufgeführt. Tab. 4 ist eine Hilfstabelle der in Gl. (C 45) auftretenden Integrale.

Auch für kleine β lassen sich Reihenentwicklungen von $H(\beta)$ angeben. Sie sind in y semikonvergent und wenig brauchbar für $y > 0,2$. Wir haben sie nur zum Vergleich mit den numerischen Ergebnissen benutzt.

6. Quasistatisches Zusammenwirken von Ionen und Elektronen

Für den Fall, daß Ionen und Elektronen quasistatisch behandelt werden können, braucht man die Feldverteilung für die Summe aus Ionen- und Elektronenfeldern. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_0(\mathfrak{E})$ ist eine Faltung aus den Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die langsam und die schnell veränderliche Komponente. Ihre FOURIER-Transformierte $F(\mathfrak{f})$, Gl. (C 16), ist das Produkt aus den FOURIER-Transformierten für langsam und schnell veränderliche Komponente. Da für einfach geladene Ionen die Ionendichte n_i gleich der Elektronendichte n_e ist

$$n_i = n_e,$$

können für langsam und schnell veränderliche Komponente die Größen in gleicher Weise dimensionslos gemacht werden, indem in Gl. (C 11) und (C 12)

$$n_0 = n_i = n_e$$

gesetzt wird. Dann entspricht der Form (C 21 c), die für eine Komponente gilt, die Form

$$F^{(g)}(k; y) \equiv f^{(g)}(x; v) = \exp\{-x^{3/2}[\psi_1^{(l)}(v) - \psi_2^{(l)}(v) + \psi_1^{(s)}(v) - \psi_2^{(s)}(v)]\} \quad (\text{C } 21\text{d})$$

für die Mischung. Wir bezeichnen sie kurz als „gemischte Komponente“. Dies, in Gl. (C 39) eingesetzt, gibt eine Verteilungsfunktion $H^{(g)}(\beta)$, bei der β mit der Normalfeldstärke E_0 der einfachen Dichte, $n_i = n_e$, zu bilden ist.

Bei der Betrachtung von BARANGER und MOZER ist nicht ganz einleuchtend, wieso für stark abgeschirmte Teilchen wie die Ionen die 2-Teilchen-Korrelationsfunktion $g_2(r_1, r_2)$ Gl. (C 32) gelten soll, ob sich nicht vielmehr die abgeschirmten Teilchen weitgehend unabhängig voneinander bewegen. Es wurde deshalb zum Vergleich noch eine weitere Verteilungsfunktion gerechnet, bei der die 2-Teilchen-Korrelation der Ionen weggelassen ist. Wir bezeichnen sie im Unterschied zur „gemischten Komponente“ mit „Spezialmischung“.

Spezalmischung:

$$F^{(sp)}(k; y) \equiv f^{(sp)}(x; v) = \exp\{-x^{3/2}[\psi_1^{(1)}(v) + \psi_1^{(s)}(v) - \psi_2^{(s)}(v)]\}. \quad (C 21e)$$

Auch hier ist x und β auf die Normalfeldstärke der einfachen Dichte $n_i = n_e$ zu beziehen. Die numerischen Ergebnisse für $H(\beta; y)$ und die Reihenentwicklungen für die „gemischte Komponente“ und die „Spezalmischung“ sind in den Tab. 3 und 5 enthalten.

β	y	gemischte Komponente				Spezalmischung		
		0	0,2	0,4	0,6	0,2	0,4	0,6
0,10	$1,059 \cdot 10^{-3}$	$1,427 \cdot 10^{-3}$	$1,871 \cdot 10^{-3}$	$2,381 \cdot 10^{-3}$	$1,389 \cdot 10^{-3}$	$1,801 \cdot 10^{-3}$	$2,292 \cdot 10^{-3}$	
0,20	$4,213 \cdot 10^{-3}$	$5,667 \cdot 10^{-3}$	$7,416 \cdot 10^{-3}$	$9,418 \cdot 10^{-3}$	$5,516 \cdot 10^{-3}$	$7,139 \cdot 10^{-3}$	$9,068 \cdot 10^{-3}$	
0,30	$9,393 \cdot 10^{-3}$	$1,260 \cdot 10^{-2}$	$1,644 \cdot 10^{-2}$	$2,080 \cdot 10^{-2}$	$1,227 \cdot 10^{-2}$	$1,583 \cdot 10^{-2}$	$2,004 \cdot 10^{-2}$	
0,40	$1,649 \cdot 10^{-2}$	$2,203 \cdot 10^{-2}$	$2,861 \cdot 10^{-2}$	$3,604 \cdot 10^{-2}$	$2,146 \cdot 10^{-2}$	$2,757 \cdot 10^{-2}$	$3,474 \cdot 10^{-2}$	
0,50	$2,534 \cdot 10^{-2}$	$3,369 \cdot 10^{-2}$	$4,351 \cdot 10^{-2}$	$5,449 \cdot 10^{-2}$	$3,283 \cdot 10^{-2}$	$4,195 \cdot 10^{-2}$	$5,256 \cdot 10^{-2}$	
0,60	$3,576 \cdot 10^{-2}$	$4,726 \cdot 10^{-2}$	$6,063 \cdot 10^{-2}$	$7,541 \cdot 10^{-2}$	$4,608 \cdot 10^{-2}$	$5,852 \cdot 10^{-2}$	$7,279 \cdot 10^{-2}$	
0,70	$4,754 \cdot 10^{-2}$	$6,239 \cdot 10^{-2}$	$7,941 \cdot 10^{-2}$	$9,796 \cdot 10^{-2}$	$6,087 \cdot 10^{-2}$	$7,672 \cdot 10^{-2}$	$9,466 \cdot 10^{-2}$	
0,80	$6,043 \cdot 10^{-2}$	$7,867 \cdot 10^{-2}$	$9,925 \cdot 10^{-2}$	$1,213 \cdot 10^{-1}$	$7,682 \cdot 10^{-2}$	$9,600 \cdot 10^{-2}$	$1,174 \cdot 10^{-1}$	
0,90	$7,418 \cdot 10^{-2}$	$9,571 \cdot 10^{-2}$	$1,196 \cdot 10^{-1}$	$1,447 \cdot 10^{-1}$	$9,353 \cdot 10^{-2}$	$1,158 \cdot 10^{-1}$	$1,402 \cdot 10^{-1}$	
1,00	$8,851 \cdot 10^{-2}$	$1,131 \cdot 10^{-1}$	$1,398 \cdot 10^{-1}$	$1,673 \cdot 10^{-1}$	$1,106 \cdot 10^{-1}$	$1,356 \cdot 10^{-1}$	$1,623 \cdot 10^{-1}$	
1,10	$1,032 \cdot 10^{-1}$	$1,304 \cdot 10^{-1}$	$1,594 \cdot 10^{-1}$	$1,886 \cdot 10^{-1}$	$1,277 \cdot 10^{-1}$	$1,548 \cdot 10^{-1}$	$1,832 \cdot 10^{-1}$	
1,20	$1,179 \cdot 10^{-1}$	$1,473 \cdot 10^{-1}$	$1,779 \cdot 10^{-1}$	$2,079 \cdot 10^{-1}$	$1,444 \cdot 10^{-1}$	$1,731 \cdot 10^{-1}$	$2,023 \cdot 10^{-1}$	
1,30	$1,324 \cdot 10^{-1}$	$1,635 \cdot 10^{-1}$	$1,949 \cdot 10^{-1}$	$2,249 \cdot 10^{-1}$	$1,604 \cdot 10^{-1}$	$1,899 \cdot 10^{-1}$	$2,192 \cdot 10^{-1}$	
1,40	$1,464 \cdot 10^{-1}$	$1,786 \cdot 10^{-1}$	$2,101 \cdot 10^{-1}$	$2,393 \cdot 10^{-1}$	$1,755 \cdot 10^{-1}$	$2,051 \cdot 10^{-1}$	$2,337 \cdot 10^{-1}$	
1,50	$1,598 \cdot 10^{-1}$	$1,924 \cdot 10^{-1}$	$2,233 \cdot 10^{-1}$	$2,510 \cdot 10^{-1}$	$1,893 \cdot 10^{-1}$	$2,184 \cdot 10^{-1}$	$2,455 \cdot 10^{-1}$	
1,60	$1,724 \cdot 10^{-1}$	$2,047 \cdot 10^{-1}$	$2,343 \cdot 10^{-1}$	$2,599 \cdot 10^{-1}$	$2,016 \cdot 10^{-1}$	$2,296 \cdot 10^{-1}$	$2,547 \cdot 10^{-1}$	
1,80	$1,944 \cdot 10^{-1}$	$2,244 \cdot 10^{-1}$	$2,497 \cdot 10^{-1}$	$2,696 \cdot 10^{-1}$	$2,216 \cdot 10^{-1}$	$2,456 \cdot 10^{-1}$	$2,653 \cdot 10^{-1}$	
2,00	$2,114 \cdot 10^{-1}$	$2,371 \cdot 10^{-1}$	$2,565 \cdot 10^{-1}$	$2,698 \cdot 10^{-1}$	$2,348 \cdot 10^{-1}$	$2,533 \cdot 10^{-1}$	$2,665 \cdot 10^{-1}$	
2,20	$2,231 \cdot 10^{-1}$	$2,430 \cdot 10^{-1}$	$2,556 \cdot 10^{-1}$	$2,623 \cdot 10^{-1}$	$2,413 \cdot 10^{-1}$	$2,535 \cdot 10^{-1}$	$2,603 \cdot 10^{-1}$	
2,40	$2,294 \cdot 10^{-1}$	$2,428 \cdot 10^{-1}$	$2,487 \cdot 10^{-1}$	$2,495 \cdot 10^{-1}$	$2,416 \cdot 10^{-1}$	$2,476 \cdot 10^{-1}$	$2,485 \cdot 10^{-1}$	
2,60	$2,307 \cdot 10^{-1}$	$2,373 \cdot 10^{-1}$	$2,373 \cdot 10^{-1}$	$2,331 \cdot 10^{-1}$	$2,369 \cdot 10^{-1}$	$2,370 \cdot 10^{-1}$	$2,331 \cdot 10^{-1}$	
2,80	$2,275 \cdot 10^{-1}$	$2,279 \cdot 10^{-1}$	$2,229 \cdot 10^{-1}$	$2,150 \cdot 10^{-1}$	$2,280 \cdot 10^{-1}$	$2,234 \cdot 10^{-1}$	$2,157 \cdot 10^{-1}$	
3,00	$2,206 \cdot 10^{-1}$	$2,157 \cdot 10^{-1}$	$2,067 \cdot 10^{-1}$	$1,964 \cdot 10^{-1}$	$2,162 \cdot 10^{-1}$	$2,078 \cdot 10^{-1}$	$1,976 \cdot 10^{-1}$	
3,25	$2,081 \cdot 10^{-1}$	$1,979 \cdot 10^{-1}$	$1,857 \cdot 10^{-1}$	$1,736 \cdot 10^{-1}$	$1,989 \cdot 10^{-1}$	$1,874 \cdot 10^{-1}$	$1,754 \cdot 10^{-1}$	
3,50	$1,928 \cdot 10^{-1}$	$1,790 \cdot 10^{-1}$	$1,651 \cdot 10^{-1}$	$1,525 \cdot 10^{-1}$	$1,803 \cdot 10^{-1}$	$1,670 \cdot 10^{-1}$	$1,545 \cdot 10^{-1}$	
3,75	$1,759 \cdot 10^{-1}$	$1,602 \cdot 10^{-1}$	$1,458 \cdot 10^{-1}$	$1,334 \cdot 10^{-1}$	$1,616 \cdot 10^{-1}$	$1,479 \cdot 10^{-1}$	$1,355 \cdot 10^{-1}$	
4,00	$1,587 \cdot 10^{-1}$	$1,423 \cdot 10^{-1}$	$1,282 \cdot 10^{-1}$	$1,166 \cdot 10^{-1}$	$1,438 \cdot 10^{-1}$	$1,303 \cdot 10^{-1}$	$1,187 \cdot 10^{-1}$	
4,25	$1,419 \cdot 10^{-1}$	$1,258 \cdot 10^{-1}$	$1,126 \cdot 10^{-1}$	$1,020 \cdot 10^{-1}$	$1,272 \cdot 10^{-1}$	$1,146 \cdot 10^{-1}$	$1,040 \cdot 10^{-1}$	
4,50	$1,261 \cdot 10^{-1}$	$1,109 \cdot 10^{-1}$	$9,887 \cdot 10^{-2}$	$8,936 \cdot 10^{-2}$	$1,122 \cdot 10^{-1}$	$1,007 \cdot 10^{-1}$	$9,124 \cdot 10^{-2}$	
4,75	$1,116 \cdot 10^{-1}$	$9,764 \cdot 10^{-2}$	$8,691 \cdot 10^{-2}$	$7,850 \cdot 10^{-2}$	$9,888 \cdot 10^{-2}$	$8,859 \cdot 10^{-2}$	$8,024 \cdot 10^{-2}$	
5,00	$9,851 \cdot 10^{-2}$	$8,602 \cdot 10^{-2}$	$7,656 \cdot 10^{-2}$	$6,919 \cdot 10^{-2}$	$8,713 \cdot 10^{-2}$	$7,808 \cdot 10^{-2}$	$7,076 \cdot 10^{-2}$	
5,25	$8,689 \cdot 10^{-2}$	$7,589 \cdot 10^{-2}$	$6,763 \cdot 10^{-2}$	$6,120 \cdot 10^{-2}$	$7,687 \cdot 10^{-2}$	$6,898 \cdot 10^{-2}$	$6,262 \cdot 10^{-2}$	
5,50	$7,667 \cdot 10^{-2}$	$6,709 \cdot 10^{-2}$	$5,992 \cdot 10^{-2}$	$5,433 \cdot 10^{-2}$	$6,796 \cdot 10^{-2}$	$6,112 \cdot 10^{-2}$	$5,561 \cdot 10^{-2}$	
5,75	$6,774 \cdot 10^{-2}$	$5,947 \cdot 10^{-2}$	$5,327 \cdot 10^{-2}$	$4,841 \cdot 10^{-2}$	$6,023 \cdot 10^{-2}$	$5,433 \cdot 10^{-2}$	$4,956 \cdot 10^{-2}$	
6,00	$5,998 \cdot 10^{-2}$	$5,288 \cdot 10^{-2}$	$4,752 \cdot 10^{-2}$	$4,330 \cdot 10^{-2}$	$5,354 \cdot 10^{-2}$	$4,846 \cdot 10^{-2}$	$4,433 \cdot 10^{-2}$	
6,50	$4,741 \cdot 10^{-2}$	$4,222 \cdot 10^{-2}$	$3,823 \cdot 10^{-2}$	$3,503 \cdot 10^{-2}$	$4,271 \cdot 10^{-2}$	$3,895 \cdot 10^{-2}$	$3,585 \cdot 10^{-2}$	
7,00	$3,796 \cdot 10^{-2}$	$3,416 \cdot 10^{-2}$	$3,117 \cdot 10^{-2}$	$2,873 \cdot 10^{-2}$	$3,454 \cdot 10^{-2}$	$3,174 \cdot 10^{-2}$	$2,939 \cdot 10^{-2}$	
7,50	$3,080 \cdot 10^{-2}$	$2,801 \cdot 10^{-2}$	$2,575 \cdot 10^{-2}$	$2,387 \cdot 10^{-2}$	$2,830 \cdot 10^{-2}$	$2,620 \cdot 10^{-2}$	$2,440 \cdot 10^{-2}$	
8,00	$2,533 \cdot 10^{-2}$	$2,326 \cdot 10^{-2}$	$2,153 \cdot 10^{-2}$	$2,006 \cdot 10^{-2}$	$2,348 \cdot 10^{-2}$	$2,188 \cdot 10^{-2}$	$2,049 \cdot 10^{-2}$	
8,50	$2,109 \cdot 10^{-2}$	$1,954 \cdot 10^{-2}$	$1,820 \cdot 10^{-2}$	$1,703 \cdot 10^{-2}$	$1,970 \cdot 10^{-2}$	$1,848 \cdot 10^{-2}$	$1,738 \cdot 10^{-2}$	
9,00	$1,777 \cdot 10^{-2}$	$1,658 \cdot 10^{-2}$	$1,553 \cdot 10^{-2}$	$1,460 \cdot 10^{-2}$	$1,671 \cdot 10^{-2}$	$1,576 \cdot 10^{-2}$	$1,489 \cdot 10^{-2}$	
9,50	$1,512 \cdot 10^{-2}$	$1,421 \cdot 10^{-2}$	$1,338 \cdot 10^{-2}$	$1,263 \cdot 10^{-2}$	$1,431 \cdot 10^{-2}$	$1,356 \cdot 10^{-2}$	$1,287 \cdot 10^{-2}$	
10,00	$1,299 \cdot 10^{-2}$	$1,228 \cdot 10^{-2}$	$1,161 \cdot 10^{-2}$	$1,100 \cdot 10^{-2}$	$1,236 \cdot 10^{-2}$	$1,177 \cdot 10^{-2}$	$1,120 \cdot 10^{-2}$	
10,50	$1,126 \cdot 10^{-2}$	$1,070 \cdot 10^{-2}$	$1,016 \cdot 10^{-2}$	$9,652 \cdot 10^{-3}$	$1,076 \cdot 10^{-2}$	$1,028 \cdot 10^{-2}$	$9,822 \cdot 10^{-3}$	
11,00	$9,837 \cdot 10^{-3}$	$9,386 \cdot 10^{-3}$	$8,944 \cdot 10^{-3}$	$8,523 \cdot 10^{-3}$	$9,440 \cdot 10^{-3}$	$9,048 \cdot 10^{-3}$	$8,668 \cdot 10^{-3}$	
11,50	$8,652 \cdot 10^{-3}$	$8,288 \cdot 10^{-3}$	$7,923 \cdot 10^{-3}$	$7,570 \cdot 10^{-3}$	$8,332 \cdot 10^{-3}$	$8,011 \cdot 10^{-3}$	$7,693 \cdot 10^{-3}$	
12,00	$7,659 \cdot 10^{-3}$	$7,361 \cdot 10^{-3}$	$7,057 \cdot 10^{-3}$	$6,760 \cdot 10^{-3}$	$7,398 \cdot 10^{-3}$	$7,132 \cdot 10^{-3}$	$6,866 \cdot 10^{-3}$	
12,50	$6,819 \cdot 10^{-3}$	$6,573 \cdot 10^{-3}$	$6,319 \cdot 10^{-3}$	$6,065 \cdot 10^{-3}$	$6,604 \cdot 10^{-3}$	$6,382 \cdot 10^{-3}$	$6,157 \cdot 10^{-3}$	
13,00	$6,103 \cdot 10^{-3}$	$5,899 \cdot 10^{-3}$	$5,684 \cdot 10^{-3}$	$5,467 \cdot 10^{-3}$	$5,925 \cdot 10^{-3}$	$5,738 \cdot 10^{-3}$	$5,546 \cdot 10^{-3}$	
13,50	$5,488 \cdot 10^{-3}$	$5,318 \cdot 10^{-3}$	$5,135 \cdot 10^{-3}$	$4,948 \cdot 10^{-3}$	$5,340 \cdot 10^{-3}$	$5,182 \cdot 10^{-3}$	$5,017 \cdot 10^{-3}$	
14,00	$4,958 \cdot 10^{-3}$	$4,814 \cdot 10^{-3}$	$4,657 \cdot 10^{-3}$	$4,495 \cdot 10^{-3}$	$4,833 \cdot 10^{-3}$	$4,698 \cdot 10^{-3}$	$4,556 \cdot 10^{-3}$	
14,50	$4,497 \cdot 10^{-3}$	$4,375 \cdot 10^{-3}$	$4,239 \cdot 10^{-3}$	$4,098 \cdot 10^{-3}$	$4,391 \cdot 10^{-3}$	$4,275 \cdot 10^{-3}$	$4,152 \cdot 10^{-3}$	
15,00	$4,094 \cdot 10^{-3}$	$3,990 \cdot 10^{-3}$	$3,872 \cdot 10^{-3}$	$3,749 \cdot 10^{-3}$	$4,004 \cdot 10^{-3}$	$3,904 \cdot 10^{-3}$	$3,797 \cdot 10^{-3}$	

Tab. 3. $H(\beta; y)$ für gemischte Komponente und Spezalmischung.

q	$U(q)$	q	$U(q)$
1,0	0	4,5	23,5625
1,5	-0,598413	5,0	0
2,0	-1,27324	5,5	-129,594
2,5	-1,49603	6,0	-458,366
3,0	0	6,5	-842,360
3,5	5,23612	7,0	0
4,0	15,2789	7,5	6317,70

Tab. 4. $U(q) = \frac{2}{\pi} \lim_{y \rightarrow 0} \int x^q \sin x e^{-yx} dx$.

$i \setminus k$	0	1	2	3
	Koeffizienten $c_{ik}^{(l)}$, langsam veränderliche Komponente. $b_0^{(l)} = 1$; $b_1^{(l)} = -0,911797$; $b_2^{(l)} = 0,7238$; $b_3^{(l)} = -0,33424$			
5	1,4960	0	-3,7899	5,1068
8	7,6394	-21,484	0	128,84
11	21,599	-208,97	-0,77759	0
	Koeffizienten $c_{ik}^{(s)}$, schnell veränderliche Komponente. $b_0^{(s)} = 1$; $b_1^{(s)} = -0,498678$; $b_2^{(s)} = 0,3667$; $b_3^{(s)} = -0,167109$			
5	1,4960	0	-1,9201	2,5532
8	7,6394	-11,750	0	45,355
11	21,599	-114,29	-0,30769	0
	Koeffizienten $c_{ik}^{(g)}$, gemischte Komponente. $b_0^{(g)} = 2$; $b_1^{(g)} = -1,410475$; $b_2^{(g)} = 1,0905$; $b_3^{(g)} = -0,50135$			
5	2,9921	0	-5,7100	7,6601
8	30,558	-66,469	0	329,28
11	172,79	-1293,0	3513,0	0
	Koeffizienten $c_{ik}^{(sp)}$, Spezalmischung. $b_0^{(sp)} = 2$; $b_1^{(sp)} = -1,246695$; $b_2^{(sp)} = 0,7238$; $b_3^{(sp)} = -0,26502$			
5	2,9921	0	-3,7899	4,0492
8	30,558	-58,751	0	185,63
11	172,79	-1142,9	2528,6	0

Tab. 5. Asymptotische Entwicklungen.

Es gilt $\psi_{\text{ges}}(v) = \sum b_l v^l$; $H(\beta; y) = \sum c_{ik} \xi^i \eta^k$
mit $\xi = \beta^{-1/2}$, $\eta = \beta^{-1/2} y$.

7. Asymptotisches Verhalten der Linienflügel

Für große elektrische Felder müssen alle Verteilungsfunktionen in die HOLTSMARKSche Verteilung, gebildet mit der Störteilchen-Dichte $n_i + n_e$, übergehen. Je größer $\beta = E/E_0$, desto kleiner ist der Bereich in x , der zum Integral (C 39) beiträgt. Mit der Reihenentwicklung (C 44) wird schließlich

$$\beta \rightarrow \infty : H(\beta) \rightarrow \frac{2}{\pi} \beta \int_0^\infty x \exp\{-b_0 x^{3/2}\} \sin \beta x dx$$

$$\rightarrow 1,49603 b_0 \beta^{-5/2}, \quad (C 46)$$

wie auch aus den angegebenen asymptotischen Entwicklungen direkt zu ersehen ist. Bezeichnen wir mit \tilde{r}_0 , \tilde{E}_0 , $\tilde{\beta}$... die Größen, die sich auf die Gesamtstörteilchen-Dichte $n_i + n_e$ beziehen, so sieht man, daß für die gemischte Komponente und die Spezalmischung die Bedingung

$$\frac{H^{(g)}(\beta) d\beta}{H^{(sp)}(\beta) d\beta} \rightarrow H^{(\text{HOLTSMARK})}(\tilde{\beta}) d\tilde{\beta} \quad (C 47)$$

für $\beta \rightarrow \infty$ erfüllt ist:

$$\beta = 2^{2/3} \tilde{\beta}, \quad b_0 = 2. \quad (C 48)$$

Will man die Verteilung $H(\beta)$ für gemischte Komponente und Spezalmischung vergleichen mit der für langsam und schnell veränderliche Komponente, so muß man sie umrechnen auf Gesamtdichte $n_i + n_e$, d. h. man muß $\tilde{\beta}$ einführen. Gemäß Gl. (C 47) und (C 48) sind die Verteilungsfunktionen bezüglich $\tilde{\beta}$

$$\tilde{H}^{(g)}(\tilde{\beta}) = H^{(g)}(\beta) \frac{d\beta}{d\tilde{\beta}} = 2^{2/3} H^{(g)}(2^{2/3} \tilde{\beta}) \quad (C 49a)$$

$$\text{und} \quad \tilde{H}^{(sp)}(\tilde{\beta}) = 2^{2/3} H^{(sp)}(2^{2/3} \tilde{\beta}). \quad (C 49b)$$

Sie liegen für festgehaltenes y zwischen den Verteilungsfunktionen für langsam und schnell veränderliche Komponente, was zu erwarten war. Bemerkenswert ist, daß der Abstand zur schnell veränderlichen Komponente sehr viel geringer ist als zur langsam veränderlichen Komponente. Gemischte Komponente und Spezalmischung unterscheiden sich nur geringfügig voneinander, für $y = 0,6$ um weniger als 3,5%.

Das asymptotische Gesetz (C 46) führt bekanntlich²¹ bei linearem STARK-Effekt zu einem Intensitätsabfall proportional $\Delta\nu^{-5/2}$ in den Linienflügeln, vgl. Gl. (C 1). Dabei ist angenommen, daß neben $dE/d\nu$ auch die relative Intensitätsverteilung $L_{M,\mu}$ der STARK-Effekt-Komponenten feldunabhängig ist. Wir benutzen das asymptotische Verhalten (C 46) dazu, um für die Grenzwellenzahl $\Delta\nu_{\text{gr}}$ der quasistatischen Verbreiterung durch Elektronen, Gl. (C 9), ein mittleres Feld \bar{E} zu vorgegebener Verschiebung zu bestimmen. Das Gewicht $p_{M,\mu}$, das jede STARK-Effekt-Komponente (M, μ) bei der Mittelung erhält, sei proportional zu ihrem Beitrag zur Linienintensität an der Stelle $\Delta\nu$, Gl. (C 1):

$$p_{M,\mu} = \frac{L_{M,\mu} W(E_{M,\mu}) |dE/d\nu|_{M,\mu}}{\sum_{M',\mu'} L_{M',\mu'} W(E_{M',\mu'}) |dE/d\nu|_{M',\mu'}} \approx \frac{L_{M,\mu} E_{M,\mu}^{-3/2}}{\sum_{M',\mu'} L_{M',\mu'} E_{M',\mu'}^{-2/3}}. \quad (C 50)$$

²¹ A. UNSÖLD¹⁰, Gl. (82, 22).

Hier ist $\left| \frac{dE}{dv} \right|_{M\mu} \approx \frac{E_{M\mu}}{|\Delta v|}$ (C 50a)

gesetzt. Das ist erlaubt – für hinreichend große $|\Delta v|$ –, da Δv_{gr} selber nur eine ungefähre Grenze ist, von der ab quasistatische Verbreiterung durch die Elektronen gilt. $L_{M\mu}$, $E_{M\mu}$ kann für vorgegebene Δv den Maschinenausdruck der numerischen Berechnung der Linienkontur entnommen werden. Man bildet

$$\bar{E} = \sum_{M,\mu} E_{M\mu} p_{M\mu} = \frac{\sum_{M,\mu} L_{M\mu} E_{M\mu}^{-1/2}}{\sum_{M,\mu} L_{M\mu} E_{M\mu}^{-3/2}} \quad (C 51)$$

und setzt $E/|\Delta v|$ in den Ausdruck (C 9) für Δv_{gr} ein. Das Ergebnis ist nur schwach abhängig von der benutzten Stelle und rechtfertigt damit die Näherung (C 50).

D. Durchführung der Rechnung und Vergleich der Ergebnisse mit den Messungen

Die Rechnung für die Singulettserie wird so durchgeführt, daß zunächst für vorgegebene Hauptquantenzahl n Tabellen $E(\text{kV/cm}) = \Delta v_{M\mu}(\text{cm}^{-1}) = L_{M\mu}$ hergestellt und in der Maschine gespeichert werden. Dann werden für verschiedene y -Werte Verteilungsfunktionen $H(\beta) = H(\beta; y)$ nach Gl. (C 39) aus vorgegebenem

$$\psi_{ges}(v) = -x^{-3/2} \ln f(x; v) \quad (D 1)$$

gerechnet. $\psi_{ges}(v)$ wird in der gewünschten Näherung – langsam veränderliche Komponente (C 21c), gemischte Komponente (C 21d) oder Spezialmischung (C 21e) – als Funktion von v eingegeben.

Die Funktionen $H(\beta; y)$ werden auf Magnetband gespeichert und stehen dann für weitere Fälle n (Hauptquantenzahl) zur Verfügung, solange die gewünschte Näherung und die Werte y dieselben bleiben.

Außerdem werden aus den Entwicklungskoeffizienten von $\psi_{ges}(v)$ für kleine v die Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung von $H(\beta; y)$ für große β berechnet. Dann wird in Schritten $\lg \Delta v = \text{const}$ das Linienprofil bestimmt. Für gegebenes Δv werden aus den Tabellen die Komponenten (M, μ) herausgesucht, die zu diesem Δv einen Beitrag geben. Durch Interpolation werden $E_{M\mu}$, $L_{M\mu}$ und $(dE/dv)_{M\mu}$ ermittelt. Für eine Reihe von Dichten wird die Normalfeldstärke E_0 , Gl. (C 11), (C 12) gebildet und damit

$$W(E_{M\mu}) = E_0^{-1} H(E_{M\mu}/E_0; y) \quad (C 14a)$$

aus den $H(\beta; y)$ -Funktionen interpoliert bzw. aus der asymptotischen Reihe berechnet. Nach Gl. (C 1) erhält man die Linienkontur.

Die Triplett-Rechnung berücksichtigt zusätzlich die J -Aufspaltung des 2P-Niveaus. Δv wird – den gemessenen Kurven entsprechend – vom Schwerpunkt der Komponenten $J=1$ und 2 aus gezählt. Gl. (C 1) verallgemeinert sich zu

$$I(\Delta v) = \sum_{J=0}^2 \frac{2J+1}{9} \sum_{M,\mu} L_{M\mu} (E_{M\mu J}) W(E_{M\mu J}) \left| \frac{dE}{dv} \right|_{M\mu J} \quad (C 1a)$$

wobei $E_{M\mu J} = E_{M\mu}(\Delta v_J)$ (D 2)

ist und

$$\Delta v_J = \Delta v + \begin{cases} 1,045 \text{ cm}^{-1} & \text{für } J=0, \\ 0,049 \text{ cm}^{-1} & \text{für } J=1, \\ -0,029 \text{ cm}^{-1} & \text{für } J=2 \end{cases} \quad (D 3)$$

(nach MOORE²²).

Gerechnet wurden die Teile der Konturen, die einen glatten Verlauf erwarten ließen, und die durch die Experimente erfaßt wurden. In der Nähe eines verbotenen Übergangs, z. B. 2P – nP, 2P – nF ist die quasistatische Theorie ungültig. Auch an den Stellen, wo eine STARK-Effekt-Komponente umkehrt:

$$\left(\frac{d\psi}{dE} \right)_{M\mu} = 0 \quad \text{für } E \neq 0$$

ist die Theorie unbrauchbar, da sie dort eine Singularität liefert.

Die Rechnungen überdecken einen Dichtebereich von

$$n_i + n_e = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \text{ bis } 1,5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}. \quad (D 4)$$

VIDAL¹ bestimmt für seine gemessenen Linienkonturen eine Dichte von

$$n_i + n_e = (6,7 \pm 0,3) \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \text{ (s. Anm. 23).} \quad (D 5)$$

Abb. 10 bis 14 zeigen für einige Beispiele gerechnete Konturen in Abhängigkeit von Dichte und Korrelationsparameter y . Mit einer gemessenen Temperatur

$$T = 1850 \text{ }^{\circ}\text{K} \quad (\pm 5\%) \quad (D 6)$$

ist [Gl. (C 11) mit $n_0 = n_e = n_i$ und Gl. (C 33)]:

$$y = \frac{r_0}{\lambda} = 0,284 \left(\frac{T}{1000 \text{ }^{\circ}\text{K}} \right)^{-1/2} \left(\frac{n_e}{10^{12} \text{ cm}^{-3}} \right)^{1/6} = 0,375. \quad (D 7)$$

²² CH. E. MOORE, Atomic Energy Levels, Vol. I, 1949.

²³ Dieser Wert unterscheidet sich von dem in¹ angegebenen, bei dem ein Rechenfehler unterlaufen war.

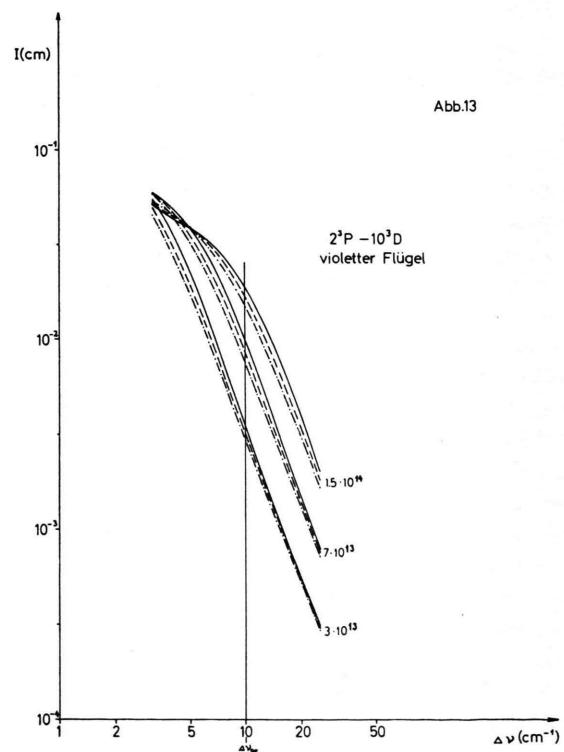
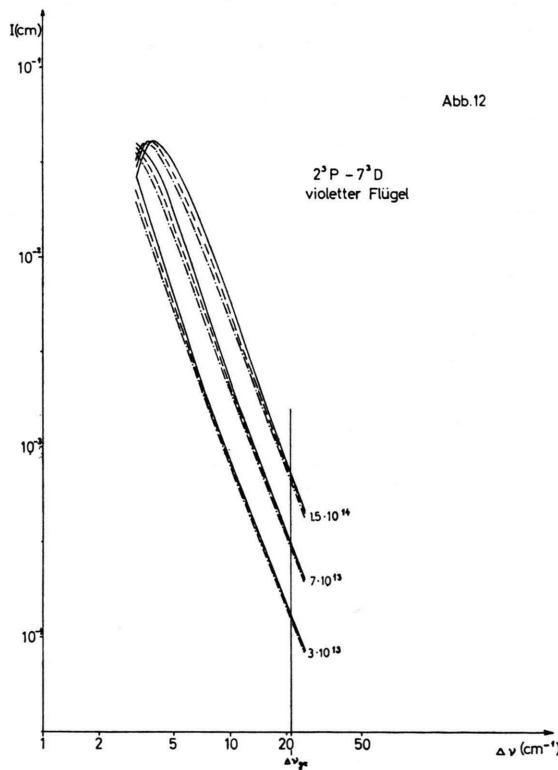
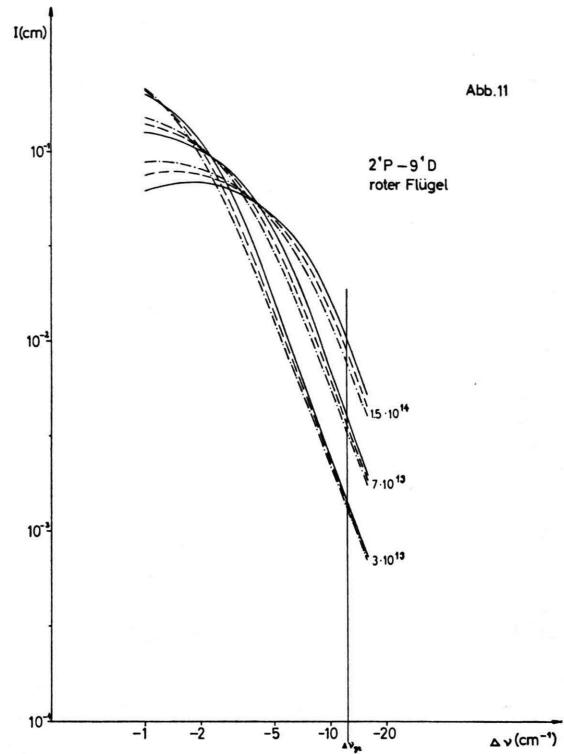
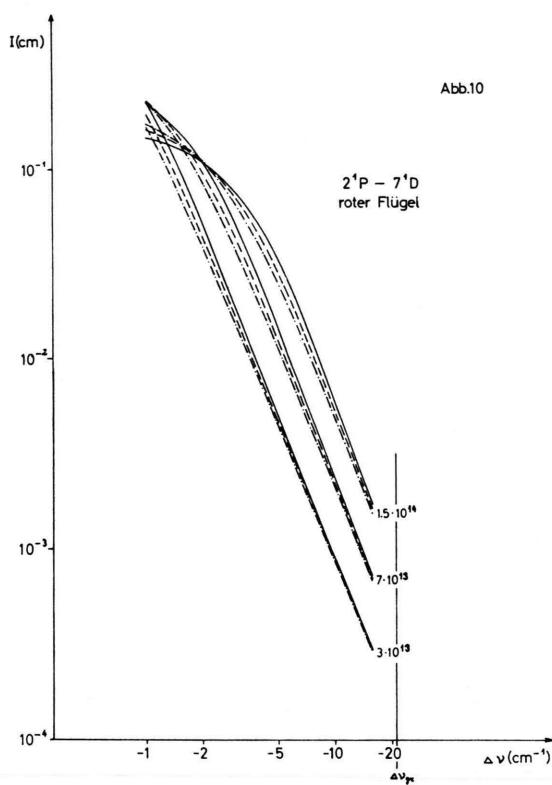


Abb. 10–13. Linienprofile $I(\Delta\nu)$ in der Näherung der „gemischten Komponente“ für verschiedene Korrelationsparameter: — $y=0$; - - - $y=0,3$; - · - · - $y=0,6$. Parameter: Dichte n_i+n_e in cm^{-3} .

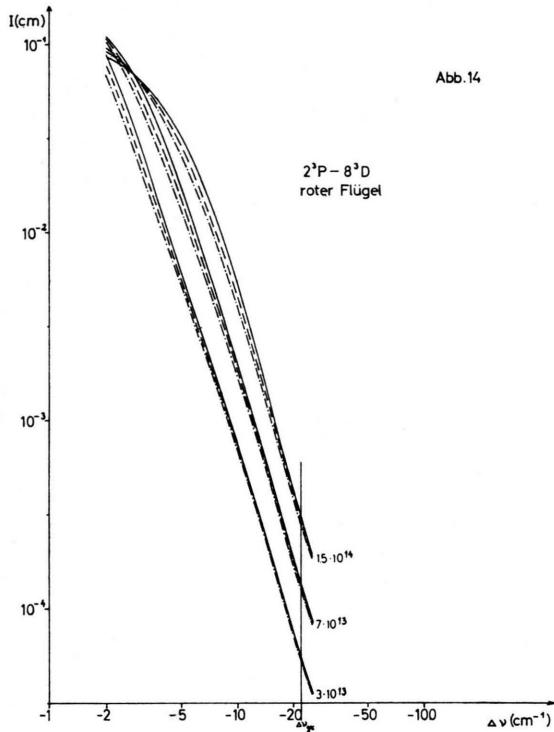


Abb. 14. $I(\Delta\nu)$, Bedeutung der Kurven wie in Abb. 10–13.

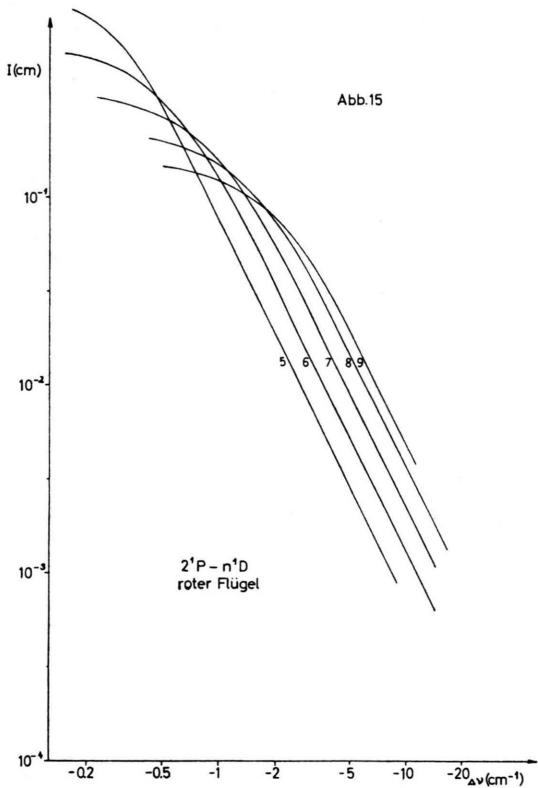


Abb. 14. $I(\Delta\nu)$, Bedeutung der Kurven wie in Abb. 10–13.

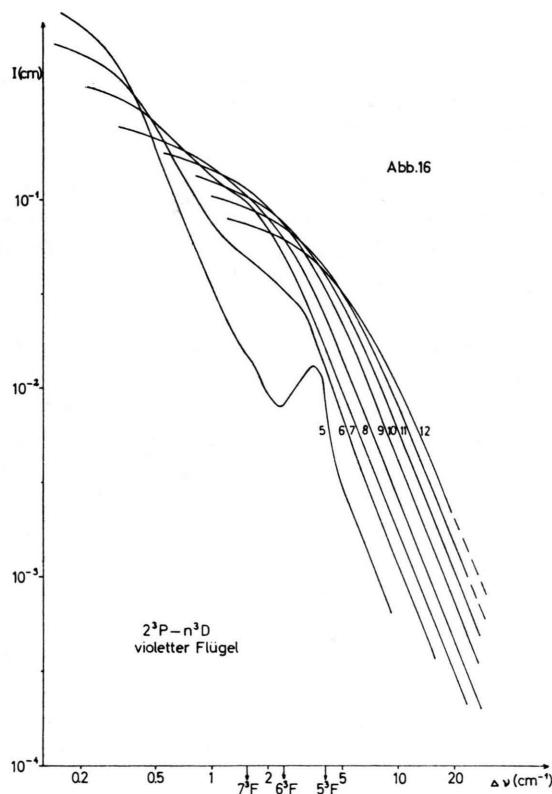


Abb. 15–17. Gemessene Linienprofile. Parameter: Hauptquantenzahl.

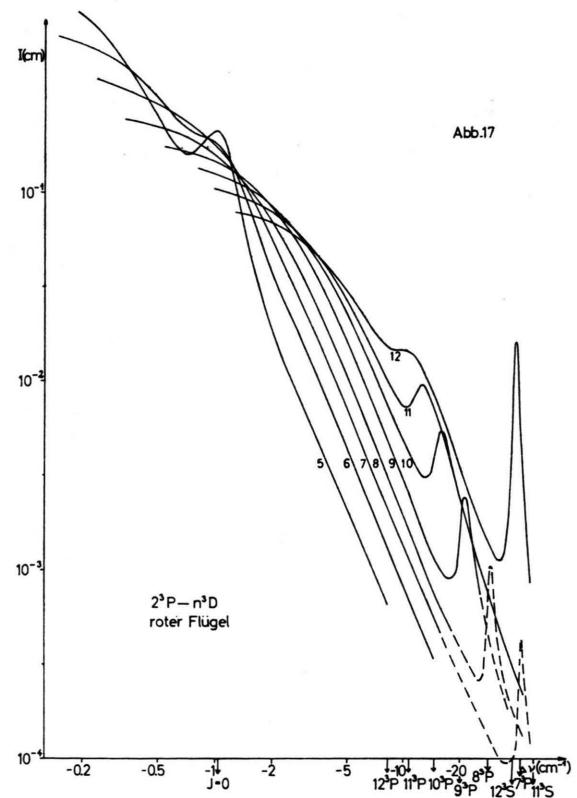


Abb. 15–17. Gemessene Linienprofile. Parameter: Hauptquantenzahl.

Die Grenzfrequenz für quasistatische Verbreiterung durch Elektronen wird nach Gl. (C 9)

$$\Delta\nu_{gr} = 33 \text{ cm}^{-1} \frac{\bar{E}/\text{kV cm}^{-1}}{|\Delta\nu|/\text{cm}^{-1}}. \quad (\text{D } 8)$$

Sie ist mit den nach (C 51) berechneten mittleren Feldstärken \bar{E} in die Kurven eingetragen.

Das erste Ergebnis ist, daß sich die Konturen für „gemischte Komponente“ und „Spezalmischung“ innerhalb der Zeichengenauigkeit nicht unterscheiden. Das heißt, daß der Unterschied der Intensitäten in den Flügeln nur wenige Prozente beträgt. Die 2-Teilchen-Korrelation für die Ionen (nach BARANGER-MOZER) ist also für die Linienkontur unerheblich.

Die Aufspaltung der Kurven in y hängt einmal von der Abschirmung der Ionenfelder, zum anderen von der 2-Teilchen-Korrelation der Elektronen ab. Vermutlich liefert die Abschirmung der Ionenfelder den Haupteffekt, da Linienkonturen, gerechnet mit reiner „langsam veränderlicher Komponente“, wesentlich stärker aufspalten als die mit reiner „schnell veränderlicher Komponente“ gerechneten. Jedenfalls ist für größere Hauptquantenzahlen n und größere Dichten die Aufspaltung an der Stelle $\Delta\nu_{gr}$ schon merklich. Wie wir sehen werden, reicht die Einführung der Korrelation jedoch nicht aus, um die theoretischen Linienprofile den gemessenen anzupassen.

Nur für den violetten Flügel der Triplettserie liegt $\Delta\nu_{gr}$ gut innerhalb des gerechneten Bereiches. Auf der roten Seite stört der verbotene Übergang $2P - nP$, der knapp außerhalb $\Delta\nu_{gr}$ erscheint. Im roten Flügel der Singulettserie besteht theoretisch kein Hindernis, die Rechnungen zu größeren $|\Delta\nu|$ fortzusetzen. Jedoch sind die Linien so schwach, daß sie experimentell nicht weiter verfolgt werden können, zumal da kräftige Tripletts-Linien in der Nachbarschaft ihre Flügel bis zu den Singulettlinien erstrecken. Der violette Flügel der Singulettserie ist nicht berechnet worden, da dort die verbotenen Komponenten $2P - nF$, $2P - nP$ eine quasistatische Behandlung in dem der Messung zugänglichen Gebiet verbieten.

Abb. 15 bis 17 geben die gemessenen Linienkonturen, normiert entsprechend Gl. (C 2b). Der rote Flügel der Triplettserie zeigt die $2P - nP$ -Komponenten. Auf der Abszisse sind die Lagen der ungestörten P-Terme angegeben. Die Verschiebung der Linien gegenüber der ungestörten Lage kommt dadurch zustande, daß die Intensität dieser Kompo-

nenten erst bei Feldstärken E merklich wird, die eine deutliche Verschiebung dieser Komponenten nach Rot hin bewirken. Aus den Abb. 2 und 6 bis 8 ist das für $n = 8$ als Beispiel abzulesen.

Zum Vergleich mit den Messungen sind die gerechneten Linienkonturen für

$$n_i + n_e = 7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}, \\ y = 0,3$$

in der Näherung der „gemischten Komponente“ herangezogen, Abb. 18 bis 20. Aus den Abb. 10 bis 14 ist zu ersehen, daß die Dichte wesentlich stärkeren Einfluß auf die Lage der Kurven als auf deren Form hat. Das benutzen wir, um den kleinen Dichteunterschied zwischen Messung und Rechnung, $6,7 \cdot 10^{13}$ gegenüber $7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, zu berücksichtigen. Es genügt für diesen Zweck, in dem Ausdruck (C 1) für die Intensität die Feldverteilung

$$W(E) = E_0^{-1} H(E/E_0)$$

durch ihr asymptotisches Verhalten (C 46) zu ersetzen:

$$W(E) = 1,496 b_0 E^{-5/2} E_0^{3/2}. \quad (\text{D } 9)$$

Die Dichteabhängigkeit von $I(\Delta\nu)$ ist durch die Potenz der Normalfeldstärke

$$E_0^{3/2} \sim (n_i + n_e) \quad (\text{D } 10)$$

gegeben. Die gemessenen Kurven lassen sich also mit den gerechneten vergleichen, wenn wir die Intensität mit $(7/6,7)$ multiplizieren. Im logarithmischen Maßstab bedeutet das einfach eine Verschiebung in vertikaler Richtung. Um das Bild nicht zu verwirren, sind jeweils nur zwei oder drei gemessene Kurven eingezzeichnet.

Im großen und ganzen liegen die Kurven an der richtigen Stelle. Für den violetten Flügel des Tripletts zeigt Abb. 21, daß für große $|\Delta\nu|$ die Richtung der gemessenen Kurven theoretisch gut wiedergegeben wird für Hauptquantenzahlen $n \leq 10$. Für die höheren Hauptquantenzahlen $n \geq 11$ tritt eine leichte Abweichung ein, die wohl in der Unsicherheit der Messung dieser schwachen Linien liegt. Während die Rechnung für die roten Singulettflügel etwa die gleiche Steigung gibt wie für die violetten Triplettsflügel, zeigen die gemessenen Singulettflügel einen wesentlich flacheren Verlauf. Es ist ihnen nicht anzusehen, daß sie asymptotisch für große $|\Delta\nu|$ in die Richtung der theoretischen Kurven einschwenken. Vermutlich liegt hier der Fehler bei den gemessenen Kurven. Von der gemessenen Gesamtintensität ist

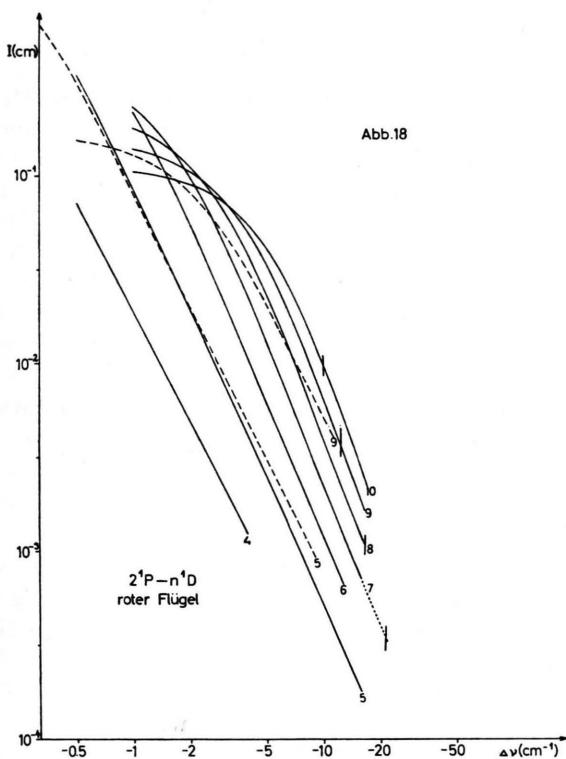


Abb. 18

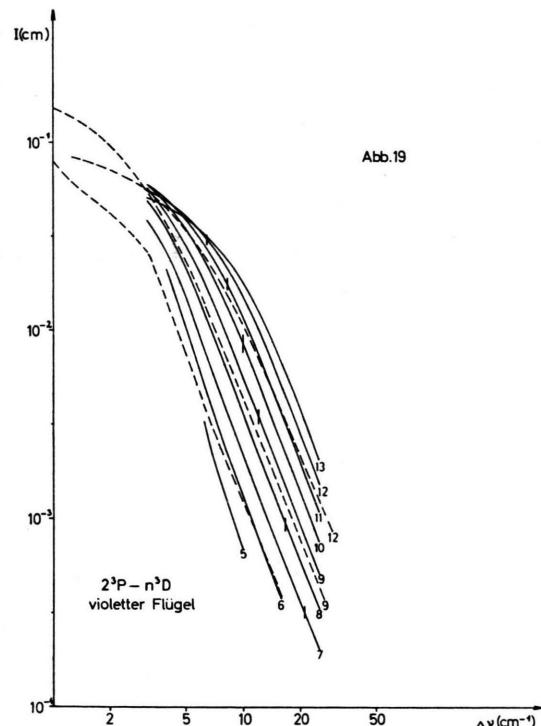


Abb. 19

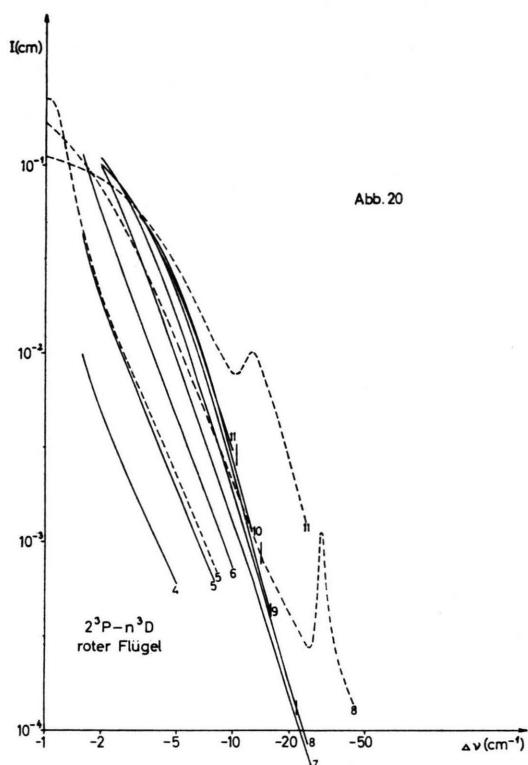


Abb. 20

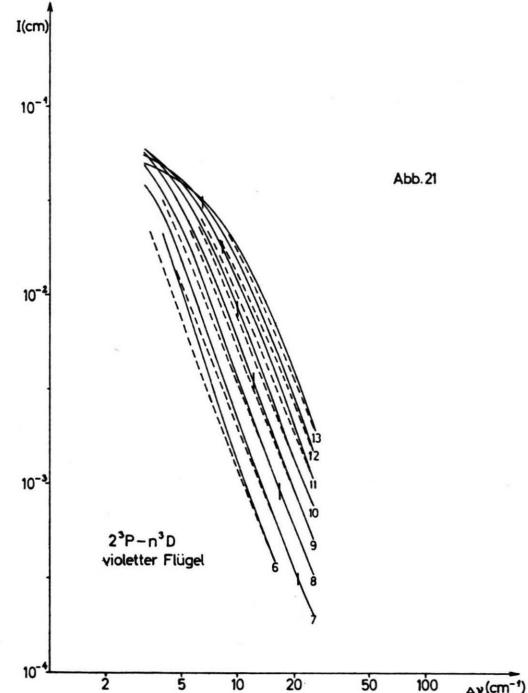


Abb. 21

Abb. 18–20. — Berechnete Profile in der Näherung der „gemischten Komponente“, Korrelationsparameter $y = 0,3$, Dichte $n_i + n_e = 7 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. — — — Gemessene Profile (normiert). Parameter: Hauptquantenzahl. Senkrechte Striche: Grenze für quasistatische Verbreiterung durch Elektronen, $\Delta\nu_{gr}$.

Abb. 21. Violetter Flügel von $2^3P - n^3D$, — — berechnete Profile wie in Abb. 16; — — — gemessene Profile (unnormiert), für große $\Delta\nu$ angepaßt an die berechneten. Parameter: Hauptquantenzahl. Senkrechte Striche: Grenze für quasistatische Verbreiterung durch Elektronen, $\Delta\nu_{gr}$.

die kontinuierliche Untergrundstrahlung abzuziehen. Sofern es sich um wahres Kontinuum und Streulicht handelt, ist dies richtig berücksichtigt. Nicht berücksichtigt blieben dagegen Beiträge von den Flügeln benachbarter starker Triplettsystemen²⁴. Ein zu gering veranschlagtes Kontinuum bewirkt aber, daß der scheinbare Verlauf der Linienflügel zu flach wird. Bei den roten Triplettsystemen schließlich bewirkt das Auftreten der $2P - nP$ -Komponente, daß die gemessenen Profile im Gegensatz zu den theoretischen nach oben umbiegen. Das ist ein typischer Stoßdämpfungseffekt. In der quasistatischen Theorie nämlich kann sich die verbotene Komponente erst jenseits des ungestörten P-Terms, also für

$$|\Delta v| \geq |\Delta v(nP, \text{unstör})|$$

auswirken, da der STARK-Effekt die P-Komponenten, $M=0$ und 1 , $\mu=1$, nach Rot verschiebt. So dürften die roten Triplettsysteme an der inneren Seite der $2P - nP$ -Spitzen einen Testfall für Stoßdämpfung abgeben. Die Art, wie sich eine wahre Druckverbreiterungstheorie vom quasistatischen Grenzfall entfernt, läßt sich an ihnen kaum studieren.

Bezüglich der absoluten Lage der gemessenen Kurven fällt auf, daß sie für wachsende Hauptquantenzahl dichter beieinander liegen als die theoretischen. Die Höhe der gemessenen Flügel nimmt verglichen mit den gerechneten Flügeln ab mit wachsender Hauptquantenzahl. Dies gilt sowohl für die violetten Triplettsysteme als auch für die roten Singulettflügel und die niedrigen Hauptquantenzahlen der roten Triplettsysteme (bevor sich der Einfluß der

$2P - nP$ -Komponenten stärker bemerkbar macht). Der Effekt ist zu ausgeprägt, um durch falsche Normierung der Kurven erklärt werden zu können. Es handelt sich um einen Fehler bis zu 0,14 im Logarithmus (violetter Triplettsystem $n=12$ gegenüber $n=6$), das sind 37%. Es ist keine Frage, daß das Planimetrieren der gemessenen Linienprofile wesentlich genauer ist. Theoretisch gibt zwar die scharfe Linie für hohe elektrische Felder einen Teil ihrer Intensität an die verbotenen Komponenten ab. Jedoch kann sich dadurch das Normierungsintegral (C 2b) um höchstens 1% erhöhen. So muß zur Zeit die Erklärung dieser Diskrepanz zwischen theoretisch berechneter Flügelhöhe und Messung offen bleiben.

Eines geht aus den Kurven eindeutig hervor: Der experimentell ermittelte Intensitätsabfall im Flügel ist bei allen Linien flacher als der nach der quasistatischen Theorie berechnete. Dies bestätigt sich auch im einfacheren Fall der Wasserstofflinien, über die an anderer Stelle gesprochen werden soll. Eine verbesserte Theorie muß sich vom quasistatischen Grenzfall in der Weise ablösen, daß sie unterhalb der quasistatischen Kurve bleibt.

Wir danken Herrn Dr. C.-R. VIDAL für vielfache Diskussionen, die wesentlich zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Auch Herrn Dr. D. PFIRSCH sind wir für sein reges Interesse an diesem Problemkreis dankbar, ebenso den Mitgliedern der Rechengruppe, die die langwierigen numerischen Rechnungen durchgeführt und die vielen Abbildungen gezeichnet haben.

Anhang

I. Entwicklung von $\psi_2(v)$ nach Kugelfunktionen

Für die in Abschnitt C 4 erwähnten sphärischen BESSEL-Funktionen gilt

$$j_l(w) = (-1)^l w^l \left(\frac{d}{w dw} \right)^l \left\{ \frac{\sin w}{w} \right\} \quad (\text{A } 1)$$

Die ersten Glieder lauten:

$$j_0(w) = \frac{\sin w}{w}, \quad j_1(w) = -\frac{\cos w}{w} + \frac{\sin w}{w^2}, \quad j_2(w) = -\frac{\sin w}{w} - \frac{3 \cos w}{w^2} + \frac{3 \sin w}{w^3}. \quad (\text{A } 2)$$

Die Funktionen $j_l^>(\zeta)$, $j_l^<(\zeta)$, Gl. (C 41), haben die Gestalt

$$j_l^>(\zeta) = (-1)^l \zeta^l \left(\frac{d}{\zeta d\zeta} \right)^l \left\{ \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} \right\}, \quad j_l^<(\zeta) = i^{-l} j_l(i \zeta) = \zeta^l \left(\frac{d}{\zeta d\zeta} \right)^l \left\{ \frac{\sinh \zeta}{\zeta} \right\} \quad (\text{A } 3a), \quad (\text{A } 3b)$$

²⁴ C.-R. VIDAL, private Mitteilung.

mit

$$\begin{aligned}
 f_0^>(\zeta) &= \frac{e^{-\zeta}}{\zeta}, & f_0^<(\zeta) &= \frac{\sinh \zeta}{\zeta}, \\
 f_1^>(\zeta) &= \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} + \frac{e^{-\zeta}}{\zeta^2}, & f_1^<(\zeta) &= \frac{\cosh \zeta}{\zeta} - \frac{\sinh \zeta}{\zeta^2}, \\
 f_2^>(\zeta) &= \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} + \frac{3e^{-\zeta}}{\zeta^2} + \frac{3e^{-\zeta}}{\zeta^3}, & f_2^<(\zeta) &= \frac{\sinh \zeta}{\zeta} - \frac{3\cosh \zeta}{\zeta^2} + \frac{3\sinh \zeta}{\zeta^3}, \\
 &\vdots & &\vdots \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned} \tag{A 4}$$

2. Reihenentwicklung der $\psi(v)$

Für die langsam veränderliche Komponente ist nach Gl. (C 26), in der v' durch v zu ersetzen ist:

$$\frac{2\sqrt{2\pi}}{15} \psi_1(v) = \int_0^\infty [1 - j_0(w)] \sigma^2 d\sigma. \tag{A 5}$$

Für Nahglieder $v\sigma \ll 1$ ist

$$w(\sigma) = \sigma^{-2}(1 + v\sigma) e^{-v\sigma} = \sigma^{-2} - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3\sigma + \dots, \tag{A 6}$$

$$j_0(w) = j_0(\sigma^{-2}) + (w - \sigma^{-2}) \left. \frac{dj_0(u)}{du} \right|_{u=\sigma^{-2}} + \dots = j_0(\sigma^{-2}) + (\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{3}v^3\sigma) j_1(\sigma^{-2}) + \dots. \tag{A 7}$$

Für Fernglieder, $\sigma \gg 1$, $v\sigma = \zeta$, ist

$$1 - j_0(w) = \frac{1}{6}w^2 + O(w^4) = \frac{1}{6}v^4\zeta^{-4}(1 + \zeta)^2 e^{-2\zeta} + O(v^8). \tag{A 8}$$

Nahglieder treten also auf für v^0, v^2, v^3, \dots , Fernglieder, unter Beachtung von $\sigma^2 d\sigma = v^{-3} \zeta^2 d\zeta$, für v^1, v^5, \dots . Wir entwickeln bis v^3 :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty [1 - j_0(w)] \sigma^2 d\sigma &= \int_0^\infty [1 - j_0(\sigma^{-2})] \sigma^2 d\sigma + \frac{1}{6} \int_0^\infty [w^2 - \sigma^{-4}] \sigma^2 d\sigma \\
 &\quad \text{(nah)} \qquad \qquad \qquad \text{(fern)} \\
 &\quad - \frac{v^2}{2} \int_0^\infty [j_1(\sigma^{-2}) - \frac{1}{3}\sigma^{-2}] \sigma^2 d\sigma + \frac{v^3}{3} \int_0^\infty [j_1(\sigma^{-2}) - \frac{1}{3}\sigma^{-2}] \sigma^3 d\sigma + \text{Rest.} \\
 &\quad \text{(nah)} \qquad \qquad \qquad \text{(nah)}
 \end{aligned} \tag{A 9}$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß der Rest

$$\int_0^\infty [j_0(\sigma^{-2}) - j_0(w) + \left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^3\sigma}{3} \right) j_1(\sigma^{-2}) + \frac{1}{6} \left(\sigma^{-4} - w^2 - \frac{v^2}{\sigma^2} + \frac{2v^3}{3\sigma} \right) \sigma^2 d\sigma \tag{A 10}$$

konvergiert und einen Nahbeitrag der Ordnung v^4 liefert. Im ersten, dritten und vierten Integral ist Konvergenz und v -Potenz unmittelbar zu übersehen. Das zweite Integral wird nach (A 8) umgeformt zu

$$\frac{1}{6} \int_0^\infty [w^2 - \sigma^{-4}] \sigma^2 d\sigma = \frac{v}{6} \int_0^\infty [(1 + \zeta)^2 e^{-2\zeta} - 1] \zeta^{-2} d\zeta. \tag{A 11}$$

Es ergibt sich schließlich

$$\psi_1(v) = 1 - \frac{15}{8\sqrt{2\pi}} v + \frac{5}{14} v^2 - \frac{5}{64} \sqrt{\frac{\pi}{2}} v^3 + O(v^4) = 1 - 0,748017 v + 0,357143 v^2 - 0,097915 v^3 + \dots \tag{A 12}$$

für die langsam veränderliche Komponente.

Nach denselben Gesichtspunkten wird $\psi_2(v)$ behandelt. Das erste Glied ist ein Fernglied, das für $l=1$, Gl. (C 40), auftritt. Setzen wir:

$$\psi_2(v) = A_1 v + A_2 v^2 + A_3 v^3 + \dots, \quad (\text{A 13})$$

so ist [Gl. (C 40), $l=1$, $j_1(w) \approx \frac{1}{3} w_1$]

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{15}{2\sqrt{2}\pi} v \cdot 3 \int_{\sigma_1=0}^0 \int_{\sigma_2=0}^{\sigma_1} \frac{1}{3} w_1 \cdot \frac{1}{3} w_2 v_j f_1 > (v_j \sigma_1) \cdot f_1 < (v_j \sigma_2) \sigma_1^2 d\sigma_1 \sigma_2^2 d\sigma_2 \\ &= \frac{5}{2\sqrt{2}\pi} v v_j^{-1} \int_{\zeta_1=0}^{\infty} \int_{\zeta_2=0}^{\zeta_1} \zeta_1^{-2} h'(\zeta_1) \zeta_2^{-2} h'(\zeta_2) \cdot f_1 > (\zeta_1) f_1 < (\zeta_2) \zeta_1^2 d\zeta_1 \zeta_2^2 d\zeta_2. \end{aligned} \quad (\text{A 14})$$

Hier ist $\zeta = v_j \sigma$ gesetzt. Es gilt nach Gl. (C 38):

$$\begin{cases} v_j = v \\ h'(\zeta) = 1 \end{cases} \text{ schnell veränderliche Komponente,} \quad (\text{A 15})$$

$$\begin{cases} v_j = \sqrt{2} v \\ h'(\zeta) = (1 + 2^{-1/2} \zeta) \exp\{-2^{-1/2} \zeta\} \end{cases} \text{ langsam veränderliche Komponente.} \quad (\text{A 16})$$

Es ist

$$A_1 = \frac{5}{4\sqrt{2}\pi} \cdot \begin{cases} 1 & \text{schnell veränderliche Komponente,} \\ (2\sqrt{2} - \frac{5}{2}) & \text{langsam veränderliche Komponente.} \end{cases} \quad (\text{A 17})$$

Die Nahglieder A_2 und A_3 ergeben sich, wenn man

$$\frac{\exp\{-v_j |\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2|\}}{|\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2|} = |\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2|^{-1} - v_j + O(v^2), \quad h(\sigma) = 1 + O(v^2) \quad (\text{A 18})$$

in Gl. (C 37) einsetzt und für den in A_1 berücksichtigten Betrag korrigiert.

$$A_2 = -\frac{15}{64\pi^2\sqrt{2}\pi} \int \int [(e^{i\sigma_1^{-2} \cos \theta_1} - 1) (e^{i\sigma_2^{-2} \cos \theta_2} - 1)] + \sigma_1^{-2} \cos \theta_1 \sigma_2^{-2} \cos \theta_2 \frac{1}{|\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2|} d^3\vec{\sigma}_1 d^3\vec{\sigma}_2. \quad (\text{A 19})$$

Hier muß wieder nach Kugelfunktionen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} A_2 = \sum_{l=0}^{\infty} A_{2l} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{15}{2\sqrt{2}\pi} (-1)^{l+1} \int_{\sigma_1=0}^{\infty} \int_{\sigma_2=0}^{\sigma_1} \left\{ [j_l(\sigma_1^{-2}) - \delta_{l0}] \cdot [j_l(\sigma_2^{-2}) - \delta_{l0}] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} \delta_{l1} \sigma_1^{-2} \sigma_2^{-2} \right\} \sigma_1^{-l-1} \sigma_2^l \sigma_1^2 d\sigma_1 \sigma_2^2 d\sigma_2 \end{aligned} \quad (\text{A 20})$$

Die Integrale lassen sich analytisch durchführen, sind aber kompliziert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} A_{20} &= -\frac{1}{21} - \frac{257}{1260} \sqrt{2} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{2} + 1) = -0,115730, \\ A_{21} &= -\frac{499}{43680} \sqrt{2} - \frac{3}{32} \left[\frac{\pi}{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \right] = -0,246047, \\ A_{22} &= -\frac{960\sqrt{2} - 1105}{51051} = -0,004949 \end{aligned} \quad (\text{A 21})$$

für schnell wie für langsam veränderliche Komponente in gleicher Weise.

Schließlich ist das dritte Glied A_3 wieder leicht zu erhalten. Es ist nach Gl. (C 37) und (A 18)

$$A_3 = \frac{15}{64\pi^2\sqrt{2}\pi} \cdot \frac{v_j}{v} \{ \int (e^{i\sigma^{-2} \cos \theta} - 1) d^3\vec{\sigma} \}^2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{15} \cdot \frac{v_j}{v}. \quad (\text{A 22})$$

Damit erhalten wir die in Gl. (C 43) aufgeführten Ergebnisse.